

Ecole doctorale n° 364 : Sciences Fondamentales et Appliquées

## Doctorat ParisTech

### T H È S E

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris**

**Spécialité “ Mécanique Numérique ”**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Sami ABDELKHALEK**

Le 19 octobre 2010

**Un exemple de flambage sous contraintes internes : Étude des défauts de planéité en laminage à froid des tôles minces.**

**(Étude numérique et comparaison avec l'expérience)**

Directeur de thèse : **Pierre MONTMITONNET**

Co-encadrement de la thèse : **Michel POTIER-FERRY & Hamid ZAHROUNI**

#### Jury

Pr. Ali LIMAM  
Pr. Hachmi BEN DHIA  
Pr. Hamid ZAHROUNI  
Pr. Jean-Claude GELIN  
Pr. Jean-Philippe PONTHOT  
Pr. Michel POTIER-FERRY  
Dr. Pascal BUESSLER  
Dr. Pierre MONTMITONNET

Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur



# Remerciements

Cette thèse est non seulement un résultat d'études durant trois ans, mais aussi le fruit de plusieurs années antérieures de travail, de patience et de persévérance.

Je tiens tout d'abord à remercier ma mère et ma femme pour leurs sacrifices. Je tiens aussi à remercier mon oncle Fawzi et mes sœurs qui ont été toujours présents pour m'aider, et j'exprime ma gratitude envers mon beau frère Fayçal qui nous a soutenus après la mort de mon père.

J'adresse ensuite mes remerciements aux membres du jury MM. Hachmi BEN DHIA, Jean-Claude GELIN, Jean-Philippe PONTHOT et Ali LIMAM d'avoir accepté de lire et de juger mon travail. J'adresse aussi mes remerciements à M. Jean-Loup CHENOT de m'avoir accueilli au sein du CEMEF. Je remercie également et vivement MM. Pierre MONTMITONNET, Michel POTIER-FERRY, Hamid ZAHROUNI et Nicolas LEGRAND pour m'avoir accueilli dans leurs équipes de recherche, pour leur encadrement au quotidien, pour leur aide et leur patience, sans oublier les enrichissantes discussions que nous avons eues et tout le temps qu'ils ont accordé au suivi de mon travail.

Je remercie particulièrement et chaleureusement M. Patrick COELS de son aide inestimable. Il a été présent dans les moments difficiles ainsi que M. Yvan CHASTEL et M. Lionel FOURMENT.

Merci aussi aux secrétaires du CEMEF et du LPMM, Mmes Marie-Françoise GUENEGAN, Geneviève ANSEEUW, Sylvie MASSOL, Anne-Martine BLUM, pour leur accueil très amical et la haute qualité de travail administratif, ainsi qu'aux membres de l'équipe informatique EII du CEMEF pour la compétence et la patience dont ils ont fait preuve pour mettre à notre disposition tous les moyens informatiques nécessaires.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers tous les chercheurs, ingénieurs et techniciens du CEMEF et du LPMM qui m'ont chaleureusement accueilli au sein de ces deux laboratoires.

Enfin, je tiens à distinguer par des remerciements tout particuliers mon ami d'enfance Abdelkader (Gaddour), avec qui j'ai partagé les moments et les aventures les plus agréables, ainsi que les deux Hicham, Youssef, Hafedh, Mohammad, Okba, Mohsen, Housseem, Monzer, Gilles, Thomas, Damien, Benoit, Noura, Maha, Rabea, Ahlem, Nadia, Sabine et Marie-Christine.



## Nomenclatures et principales notations

MAN.....	Méthode Asymptotique Numérique.
Lam3/Tec3-Standard.....	Version standard du modèle de laminage Lam3/Tec3.
« MAN » .....	Modèle éléments finis de flambage de coques.
Lam3/Tec3-Counhaye.....	Lam3/Tec3 couplé avec le modèle flambage simplifié de Counhaye.
Lam3/Tec3-MAN découplée..	Modèle de laminage par chainage entre Lam3/Tec3 et le modèle « MAN », en négligeant l'interaction emprise-flambage.
Lam3/Tec3-MAN couplée....	Modèle de laminage couplant Lam3/Tec3 et le modèle « MAN ».
MEF.....	Méthodes des éléments finis.
MDF.....	Méthodes des éléments finis.
$a$ .....	Paramètre de développement MAN.
$a_{\max}$ .....	Rayon de validité.
$a_c$ .....	Valeur de $a$ au point de bifurcation.
$b$ .....	Largeur d'une plaque où une tôle.
$b_c$ .....	Largeur d'un capteur du rouleau de planéité.
$\mathbb{C}$ .....	Tenseur d'élasticité.
$D$ .....	Tenseur de vitesse de déformation.
$D^*$ .....	Tenseur de vitesse de déformation virtuel.
$d$ .....	Déviateur de $D$ .
$E$ .....	Module d'Young.
$el$ .....	Numéro d'un élément.
$F$ .....	Vecteur second membre qui représente les efforts appliquées.
$F^{lam}$ .....	Force de laminage par unité de largeur.
$F_{tr}$ .....	Force de traction en laminage.
$f_\mu$ .....	Force de perturbation pour la recherche du point de bifurcation.
$F^{nl}$ .....	Vecteur second membre non linéaire qui apparaît dans le développement MAN.
$F_\mu$ .....	Vecteur du second membre représentant la force de perturbation.
$G$ .....	Index des points d'intégration.
$h$ .....	Epaisseur d'une plaque où d'une tôle.
$h_e$ .....	Epaisseur de la tôle à l'entrée de l'emprise.
$h_{moy}$ .....	Epaisseur moyenne de la tôle suivant la largeur de la table.
$h_s$ .....	Epaisseur de la tôle en sortie de l'emprise.
$IP$ .....	Indice de planéité.
$it$ .....	Itération de Newton-Raphson.
$J$ .....	Fonction erreur quadratique.
$K$ .....	Fonction de distribution transversale de la contrainte longitudinale $\sigma_{xx}$ .
$[K_T]$ .....	Matrice de rigidité tangente.
$L$ .....	Longueur d'une « fibre » de la tôle dans la direction du laminage.
$L_{ref}$ .....	Longueur d'une « fibre de référence » de la tôle dans la direction du laminage.
$L_t(.)$ .....	Opérateur tangent définit en un point régulier d'un pas MAN.
$L_t^0(.)$ .....	Opérateur tangent définit au début d'un pas MAN.
$l$ .....	Longueur d'une plaque (ou tôle).
$\tilde{l}$ .....	Longueur d'onde d'un mode de flambage sinusoïdal.
$N_x$ .....	Force de réaction par unité de largeur d'une section transversale d'une plaque (ou tôle) $N_x = -h\sigma_{xx}(y)$ .
$n$ .....	Nombre de demi-ondes du défaut en bord ondulé d'une plaque (ou tôle) sous forme sinusoïdale.
$noe$ .....	Numéro d'un nœud.
$\vec{n}_r$ .....	Vecteur unitaire normal à la facette de raccordement (couplage) entre les modèles Lam3/Tec3 et « MAN ».

$P$ .....	Pression de traction appliquée à une plaque. En laminage, elle correspond à la traction de laminage appliquée à la tôle $P = F_{tr} / b.h_{moy}$ .
$q$ .....	Amplitude d'un mode de flambage sinusoïdal.
$R$ .....	Rayon du cylindre de travail.
$r$ .....	Vecteur position d'un point de la ligne moyenne d'une coque à l'état initial.
$\bar{r}$ .....	Vecteur position d'un point de la ligne moyenne d'une coque à l'état déformé.
$r_h$ .....	Réduction relative en laminage $r_h = \frac{h_e - h_s}{h_e}$ .
$S$ .....	Tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff.
$S^{res}$ .....	Tenseur de contrainte résiduelle utilisé par le modèle « MAN ».
$\vec{T}_c$ .....	Force de contact résultante entre un capteur du rouleau de planéité et la tôle.
$T^{imp}$ .....	Vecteur contrainte externe imposée : tractions amont et aval de laminage.
$U$ .....	Variable mixte contenant les inconnues élémentaires du modèle « MAN ».
$\tilde{u}$ .....	Fonction d'interpolation (polynomiale) de la méthode des moindres carrés mobiles (moving least square : MLS).
$u^h$ .....	Champ à interpoler par la MLS.
$V^*$ .....	Champ de vitesse virtuelle.
$V_{ref}$ .....	Vitesse d'élongation d'une « fibre de référence » de la tôle dans la direction du laminage.
$x(x,y,z)$ .....	Position et coordonnées d'un point dans l'espace.
$x_c(x_c,y_c,z_c)$ .....	Position d'un point d'interpolation utilisé par la MLS.
$i,j$ et $k$ .....	Indices de numérotations.
$I,II$ .....	Première et deuxième direction principale dans le plan de la tôle.
$\alpha$ .....	Champ de déformation additionnelle $\tilde{\gamma}$ discrétisé.
$\alpha_c$ .....	Angle de contact entre la tôle et un capteur du rouleau de planéité.
$\alpha_t$ .....	Matrice des coefficients thermomécaniques.
$\gamma$ .....	Tenseur de déformation généralisé de Green-Lagrange.
$\tilde{\gamma}$ .....	La partie additionnelle non compatible de $\gamma$ .
$\gamma^c$ .....	La partie compatible de $\gamma$ .
$\gamma^l$ .....	La partie linéaire de $\gamma^l$ .
$\gamma^{nl}$ .....	La partie non linéaire de $\gamma^{nl}$ .
$\gamma_{VK}$ .....	Tenseur de déformation généralisé dans l'approximation de Von-Karman.
$\gamma_{VK}^l$ .....	La partie linéaire de $\gamma_{VK}$ .
$\gamma_{VK}^{nl}$ .....	La partie non linéaire de $\gamma_{VK}$ .
$\Delta$ .....	Différentiel d'une variable par rapport à une valeur de référence.
$\Delta c$ .....	« Correcteur » de l'algorithme de Newton-Raphson.
$\Delta s$ .....	« Prédicteur » de l'algorithme de Newton-Raphson.
$\Delta \mu$ .....	Indicateur de bifurcation.
$\delta^{conv}$ .....	Critère de convergence.
$\bar{\epsilon}$ .....	Déformation équivalente en HPP.
$\dot{\bar{\epsilon}}$ .....	Taux de déformation équivalente en HPP.
$\epsilon^e$ .....	Déformation élastique en HPP.
$\epsilon^f$ .....	Déformation reprise par le flambage.
$\epsilon_{yy}^{moy}$ .....	La moyenne suivant $x$ , à une position donnée en $y$ , de la composante de la déformation plastique transversale $\epsilon_{yy}$ dans l'emprise.
$\epsilon^p$ .....	Déformation plastique en HPP.
$\eta$ .....	Paramètre d'amortissement numérique.

$\Theta$ .....	Température.
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .....	Cordonnées curvilignes convectives d'un point d'une coque.
$\kappa_1$ et $\kappa_2$ .....	Paramètres définissant le type de pilotage MAN.
$\lambda$ .....	Paramètre de chargement.
$\lambda_I^f, \lambda_{II}^f$ .....	Déformations reprises par le flambage respectivement suivant les directions principales $I$ et $II$ .
$\lambda^{(res)}$ .....	Paramètre de chargement en contraintes résiduelles.
$\hat{\lambda}^{(res)}$ .....	Valeur de $\lambda^{(res)}$ atteinte à la fin du calcul 3 du modèle « MAN ».
$\lambda^{(tra)}$ .....	Paramètre de chargement en traction.
$\hat{\lambda}^{(tra)}$ .....	Valeur de $\lambda$ atteinte à la fin du calcul 1 du modèle « MAN ».
$\hat{\xi}$ .....	Champ de déplacement $\xi$ discrétisé.
$\hat{\xi}^*$ .....	Champ de déplacement $\xi$ discrétisé au point de bifurcation.
$\hat{\xi}'$ .....	Champ de déplacement $\xi$ discrétisé après la bifurcation (post-flambage).
$\hat{\xi}_0$ .....	Champ de déplacement $\xi$ discrétisé initial.
$\rho$ .....	Largeur adimensionnelle d'une plaque (ou tôle) : $\rho = \frac{y}{b}$ .
$\sigma_{\max}^-$ .....	Plus haut niveau de contrainte de compression dans la tôle hors emprise
$\sigma^d$ .....	Déviateur de $\sigma$ .
$(\dot{\sigma}^d)^J$ .....	Dérivée de Jaumann du déviateur des contraintes $\sigma^d$ .
$\sigma^h$ .....	La partie sphérique de $\sigma$ .
$\sigma^{res}$ .....	Contraintes résiduelles hors emprise issues du calcul Lam3/Tec3.
$\sigma_0$ .....	Contrainte d'écoulement plastique.
$\sigma_c$ .....	Contrainte critique locale de flambage.
$\sigma_n$ .....	Contrainte normale exercée par les cylindres de travail sur la tôle dans la zone de contact $\partial\Omega_c$ .
$\sigma_{MAN}$ .....	Champ de contrainte $\sigma^{res}$ redistribué par le flambage.
$\sigma_t$ .....	Contrainte de cisaillement dû au frottement cylindres tôle.
$\sigma_{yi}$ .....	Moyenne dans l'épaisseur de la contrainte longitudinale $\sigma_{xx}$ , mesurée en $y_i$ à l'aide du rouleau de planéité.
$\Omega$ .....	Domaine défini par le volume d'un matériau.
$\partial\Omega_c$ .....	Domaine défini par la surface de contact entre les cylindres de travail et la tôle.
$\partial\Omega_f$ .....	Surface du domaine $\Omega$ où les vecteurs contraintes externes $t^{imp}$ sont imposés.
$\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \partial\Omega_3, \partial\Omega_4$ .....	Les bords d'une plaque dans le modèle « MAN ».
$\omega_p$ .....	Fonction poids de la MLS centrée en $x_c$ .





# Sommaire

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>3</b>
<b>CH.1      GENERALITES SUR LE LAMINAGE DES TOLES METALLIQUES .....</b>	<b>6</b>
1.1      PRESENTATION DU LAMINAGE .....	6
1.2      PROBLEMES GEOMETRIQUES EN LAMINAGE : DEFAUTS DE PLANEITE .....	7
1.2.1 <i>Origine des défauts de planéité</i> .....	8
1.2.2 <i>Notion de défauts de planéité latents et défauts de planéité manifestes</i> .....	9
1.2.3 <i>Quantification des défauts de planéité</i> .....	10
1.2.4 <i>Quelques dispositifs et méthodes utilisés pour les mesures des défauts</i> .....	12
1.2.4.i      Mesures en ligne .....	12
1.2.4.ii      Mesures hors ligne .....	17
1.3      QUELQUES ELEMENTS TECHNIQUES SUR LE LAMINAGE .....	18
1.3.1 <i>Exemples de cages de laminaires utilisées</i> .....	18
1.3.2 <i>Cylindres de travail</i> .....	19
1.3.3 <i>Cylindres d'appui</i> .....	20
1.3.4 <i>Bombé thermique</i> .....	20
1.3.5 <i>Bombé tôle</i> .....	20
1.3.6 <i>Bombé cylindre</i> .....	21
1.3.7 <i>Serrage et équilibrage des cylindres</i> .....	22
1.3.8 <i>Traction en laminage</i> .....	22
<b>CH.2      ETUDES BIBLIOGRAPHIQUES ET POSITION DU PROBLEME .....</b>	<b>24</b>
2.1      PRINCIPAUX PHENOMENES PHYSIQUES MIS EN JEU POUR LES PROBLEMES DE PLANEITE EN LAMINAGE .....	24
2.2      AXES DE L'ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE .....	25
2.3      ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA MODELISATION DU LAMINAGE .....	26
2.3.1 <i>Classification des modèles de laminage</i> .....	26
2.3.2 <i>État de l'art sur la modélisation du laminage</i> .....	26
2.3.2.i      Modèles de calcul de bande .....	26
2.3.2.ii      Modèles de cédage des cylindres .....	29
2.3.2.iii      La méthode des éléments finis pour la modélisation du laminage .....	30
2.4      MODELISATION DIRECTE DES DEFAUTS DE PLANEITE MANIFESTES .....	32
2.5      APPROCHE DECOUPLEE (CHAINAGE) POUR LA MODELISATION DES DEFAUTS DE PLANEITE MANIFESTES .....	34
2.5.1 <i>Modèles de flambage de coques sous contraintes résiduelles pour modéliser les défauts de planéité manifestes en laminage</i> .....	34
2.5.1.i      Modèles semi-analytiques .....	34
2.5.1.ii      Modèles de flambement par éléments finis coques .....	39
2.5.2 <i>Analyse bibliographique de l'approche dé耦lée basée sur le chaînage</i> .....	43
2.6      UN MODELE DE FLAMBAGE COMPLETEMENT COUPLE MAIS SIMPLE .....	44
2.7      SYNTHESE DE L'ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE .....	46
<b>CH.3      APPROCHE COUPLEE UTILISANT UN MODELE SIMPLE DE FLAMBAGE (LAM3/TEC3-COUNHAYE) .....</b>	<b>48</b>
3.1      GENERALITES SUR LE MODELE EF DE LAMINAGE LAM3/TEC3 .....	49
3.1.1 <i>Lam3</i> .....	49
3.1.2 <i>Tec3</i> .....	51
3.2      IMPLEMENTATION DU MODELE SIMPLIFIE DE FLAMBAGE DANS LAM3/TEC3 .....	52
3.3      PROBLEMES DE CONVERGENCE ET INTRODUCTION D'UN TERME D'AMORTISSEMENT .....	53
3.4      ETUDE DE L'INTERACTION ENTRE LE FLAMBAGE ET L'EMPRISE .....	59
3.5      PREDICTION DES DEFAUTS DE PLANEITE AVEC LE MODELE SIMPLIFIE DE FLAMBAGE .....	66
3.6      CONCLUSION .....	68
<b>CH.4      UN MODELE EF DE FLAMBAGE DE COQUES SOUS CONTRAINTES RESIDUELLES..</b>	<b>69</b>
4.1      DESCRIPTION GEOMETRIQUE ET CINEMATIQUE DE LA COQUE UTILISEE .....	70
4.2      FORMULATION VARIATIONNELLE DU MODELE « MAN » .....	71
4.3      LES DIFFERENTES ETAPES D'UTILISATION DU MODELE DE FLAMBAGE « MAN » .....	72

4.3.1	Première étape (pré-tension) .....	72
4.3.2	Deuxième étape (calcul de flambement) .....	73
4.3.3	Troisième étape (calcul du post flambage) .....	73
4.3.4	Quatrième étape (déchargement de la traction $P$ ) .....	74
4.4	METHODE ASYMPTOTIQUE NUMERIQUE POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME NON LINEAIRE .....	74
4.4.1	Calcul du problème de traction : étape 1 .....	77
4.4.2	Calcul de la charge critique et du mode de flambage : étape 2 .....	78
4.4.3	Calcul du post-flambage sous contraintes résiduelles : étape 3 .....	80
4.4.4	Calcul du relâchement : étape 4 .....	82
4.5	APPLICATIONS ET VALIDATIONS .....	84
4.5.1	Plaque sous contrainte résiduelle longitudinale homogène .....	84
4.5.2	Plaque sous contrainte résiduelle longitudinale hétérogène dans la largeur .....	85
4.5.2.i	Démarche générale .....	85
4.5.2.ii	Importance de la force externe de traction $P$ .....	86
4.5.2.iii	Retour sur les conditions aux bords et au centre .....	89
4.5.2.iv	Choix de la longueur de plaque .....	90
4.5.2.v	Notion de planéité latente et planéité manifeste en utilisant le modèle « MAN » .....	90
4.6	CONCLUSION .....	92
<b>CH.5</b>	<b>MODELE DE LAMINAGE LAM3/TEC3-MAN DECOUPLE .....</b>	<b>93</b>
5.1	MODELISATION DES DEFAUTS DE PLANEITE EN LAMINAGE A L'AIDE DE L'APPROCHE DECOUPLEE .....	94
5.1.1	Discussion des résultats .....	94
5.1.2	Comparaisons entre Lam3/Tec3-MAN découplée et Lam3/Tec3-Counhaye couplée .....	99
5.2	IMPORTANCE DE L'UTILISATION DE TOUTES LES COMPOSANTES PLANES ( $\Sigma_{xx}$ , $\Sigma_{xy}$ ET $\Sigma_{yy}$ ) DU TENSEUR DE CONTRAINTES RESIDUELLES .....	99
5.2.1	Calcul des défauts de planéité en laminage en ne transférant que la composante longitudinale $\sigma_{xx}$ du champ de contraintes résiduelles .....	99
5.2.2	Calcul des défauts de planéité en laminage en ne transférant que la composante longitudinale $\sigma_{xx}$ du champ de contrainte résiduelle, supposé uniforme suivant la direction de laminage .....	101
5.2.3	Complément d'analyse des résultats de l'approche Lam3/Tec3-MAN découplée .....	102
5.3	CONCLUSION .....	102
<b>CH.6</b>	<b>MODELE DE LAMINAGE LAM3/TEC3-MAN COUPLE .....</b>	<b>103</b>
6.1	CONSTRUCTION DU MODELE DE LAMINAGE COUPLE LAM3/TEC3-MAN .....	103
6.2	ALGORITHME DE COUPLAGE ENTRE LAM3/TEC3 ET LE MODELE « MAN » .....	106
6.3	APPLICATIONS : MODELISATION DES DEFAUTS DE PLANEITE EN LAMINAGE A L'AIDE DE L'APPROCHE COUPLEE LAM3/TEC3-MAN .....	111
6.3.1	Analyse dans l'emprise .....	111
6.3.1.i	Interaction entre l'emprise et le flambage .....	111
6.3.1.ii	Comparaison entre les modèles Lam3/Tec3-MAN et Lam3/Tec3-Counhaye par rapport aux effets du flambage sur l'emprise .....	112
6.3.2	Comparaison avec les mesures expérimentales et les défauts de planéité manifestes détectés ....	113
6.3.3	Position du modèle couplé Lam3/Tec3-MAN par rapport à Lam3/Tec3-Counhaye et Lam3/Tec3-MAN découplé .....	116
6.4	CONCLUSION .....	117
	<b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>119</b>
	<b>ANNEXES .....</b>	<b>122</b>
	<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>	<b>134</b>

## Introduction générale

### Contexte du travail

Les tôles métalliques minces connaissent une utilisation massive dans le monde entier dans des domaines aussi divers que l'emballage, le bâtiment, les applications électriques, et notamment dans les domaines du transport tels que l'automobile, l'aéronautique et la construction navale. Ce type de structure est obtenu suite aux procédés de laminage qui constituent donc une étape-clé de l'industrie sidérurgique.

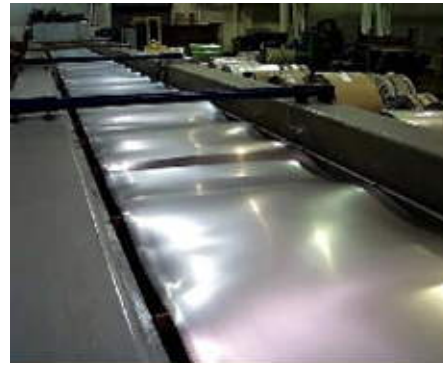
Le procédé de laminage ne cesse d'évoluer depuis son invention, il y a plus de quatre siècles. Il a fait ainsi durant toute cette période et jusqu'à ce jour, l'objet de travaux de recherche et d'investigation que l'on peut parfois qualifier « de pointe ». Tous les aspects mécaniques, chimiques, géométriques, architecturaux, le pilotage des actionneurs d'un laminoir, ont été minutieusement étudiés afin d'observer leurs impacts sur la qualité du produit fini. Cette dernière représente donc le « noyau » de la recherche sur le laminage des tôles métalliques. On distingue plusieurs critères de qualité du produit laminé :

- Critères surfaciques et tribologiques : état de surface et rugosité, résistance à la corrosion...
- Critères physiques et structuraux : structure cristallographique, densité de dislocations, taille et joints de grains....
- Critères mécaniques : Anisotropie, endommagement, dureté, limite d'élasticité, emboutissabilité....planéité.
- Etc...

Nos travaux présentés dans le présent document portent sur l'étude des défauts de planéité des tôles laminées.

Il arrive qu'une tôle en sortie d'un laminoir mal réglé présente une distribution de contraintes résiduelles capable d'engendrer son flambage (cf. § 2.1). Par conséquent, les défauts de planéité apparaissent sous forme d'ondulations, comme montré sur la figure ci-dessous. Chez le client, ces défauts de planéité peuvent poser des problèmes d'assemblage, de peinture, d'esthétique ou

de productivité. Par conséquent, la planéité de la tôle est un élément majeur pour la qualité du produit. Elle représente un souci important pour les industriels du laminage, qui développent des techniques diverses pour la maîtriser.



**Exemples de défauts de planéité observés au cours du laminage [1].**

### **Nécessité d'un modèle numérique de laminage pour la prédiction des défauts de planéité**

Même si des outils spécifiques sont utilisés pour améliorer la planéité après le laminage, il est de la plus haute importance qu'un premier contrôle de la planéité des tôles laminées se fasse en ligne (au cours du laminage) en jouant sur plusieurs paramètres (lubrification, efforts des actionneurs, vitesse de laminage... : cf. chapitre 1). Déterminer les conditions optimales de laminage qui donnent la meilleure qualité du produit n'est pas une chose aisée. Pour cela, le savoir-faire du lamineur est mis à profit, tout en s'appuyant sur une base de données qui contient un ensemble d'informations enregistrées antérieurement. Comme dans bien des domaines, la lourdeur et le coût élevé des études expérimentales rendent séduisante l'utilisation des modèles numériques qui apportent de plus des éléments de compréhension en profondeur. L'expérience reste évidemment un nécessaire moyen de vérification des résultats numériques.

### **Objectifs de la thèse**

ArcelorMittal et Alcan sont deux fabricants de tôles métalliques, qui disposent d'un modèle numérique (méthode des éléments finis) nommé Lam3/Tec3 [2,3,4] dédié et adapté pour la simulation du procédé de laminage des produits plats. Ce modèle, décrit plus en détails au chapitre 3, présente une précision satisfaisante pour la simulation des cas de laminage dans lesquels le flambage, donc les défauts de planéité, ne se manifeste pas. Dans le cas contraire, c'est-à-dire pour les cas de laminage où les tôles sont susceptibles de flamber, Lam3/Tec3 s'est révélé limité pour reproduire les défauts de planéité, ses résultats ne sont pas représentatifs de la réalité. Comme expliqué par la suite (cf. chapitre 2, § 2.4), cette limitation est principalement due à la nature de la discrétisation spatiale utilisée : des éléments hexaédriques non adéquats pour décrire le flambage. Ainsi, dans le but de l'améliorer, l'objectif de nos travaux est d'enrichir l'analyse faite par Lam3/Tec3, à l'aide d'un modèle Eléments Finis de flambage de coques sous contraintes résiduelles. Développé au LPMM, ce modèle de flambage est basé sur une formulation de coques et sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) comme méthode de résolution des problèmes non linéaires (cf. chapitre 4).

Ce mémoire de thèse est organisé de la manière suivante : après une introduction au procédé, à sa technologie, aux défauts de planéité et à leur mesure (chapitre 1), une bibliographie générale sur le laminage et sa modélisation est présentée dans le chapitre 2, avec un regard plus précis sur

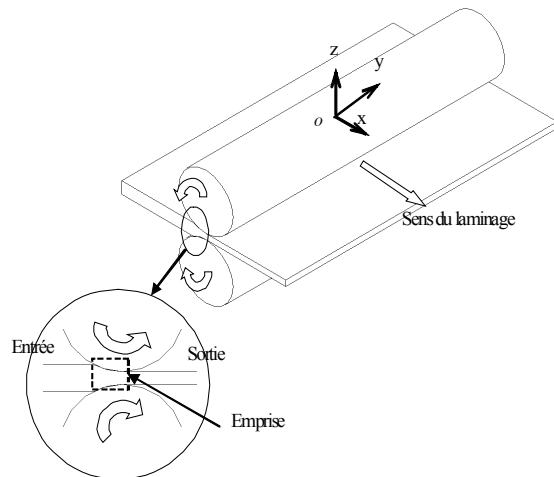
celle des défauts de planéité. Un premier modèle, développé au sein de Lam3/Tec3, est ensuite décrit au chapitre 3 ; issu de notre travail mais fortement appuyé sur un travail antérieur (thèse de C. Counhaye [5]), il couple intimement laminage et flambage – ce dernier étant décrit par un modèle très simple. Ensuite, au chapitre 4, nous détaillons la formulation du modèle « MAN » – coques et son application aux problèmes de contraintes résiduelles. Dans le chapitre 5, nous présentons nos développements en vue de l'application du modèle éléments finis coques avec résolution « MAN » aux problèmes de contraintes résiduelles, et les tests correspondants, en configuration découplée (ou pour mieux dire chaînée) ; cette adaptation a principalement consisté en un travail sur un transfert précis des contraintes résiduelles de Lam3/Tec3 au code coques. Enfin au chapitre 6, nous montrons que l'on peut *coupler itérativement* les deux logiciels Lam3/Tec3 et « MAN » – coques, et que cela améliore la description des résultats grâce à la prise en compte de l'effet, sur les champs sous emprise, des transformations induites par le flambement hors emprise.

## CH.1 Généralités sur le laminage des tôles métalliques

Dans ce chapitre sont regroupées et résumées toutes les informations nécessaires concernant le laminage et les définitions de certaines terminologies, en se limitant à celles qui seront utiles dans le cadre des travaux détaillés dans le présent document. Divers supports sont utilisés pour dégager ces renseignements, mais les généralités sur le laminage exposées dans les paragraphes qui suivent, ont été principalement extraites des références [6-10].

### 1.1 Présentation du laminage

L'opération de laminage consiste à entraîner par effet de frottement une bande (tôle) métallique sous deux outils cylindriques (cylindres de travail : cf. § 1.3.2) animés d'un mouvement de rotation inverse. La matière est donc forcée de s'écouler plastiquement (cf. figure 1-1), ce qui va engendrer la réduction de l'épaisseur de la tôle en sortie de l'emprise<sup>1</sup>. L'épaisseur du produit fini est obtenue progressivement par une succession de passes de laminage (cf. figure 1-2). Les premières séries de réduction s'effectuent à chaud afin d'exploiter la baisse de la résistance mécanique avec la température à des fins d'économies d'énergie, et pour ajuster les caractéristiques métallurgiques du produit. A ce niveau, une brique est transformée en une bobine de tôle fine, passant au fil des réductions de quelques centimètres à quelques millimètres d'épaisseurs (pour l'acier, on part généralement de 250mm pour arriver à une épaisseur entre 1.5 et 6mm). Pour les aciers, le laminage à chaud commence vers 1200 -



**Figure 1-1. Schématisation simplifiée du principe du laminage d'une tôle.**

<sup>1</sup> Zone de contact entre les cylindres de travail de la cage et la tôle, où s'effectue l'écrasement de cette dernière (cf. figure 1-1).

1300°C pour se terminer entre 700°C et 900°C. Par contre, les faibles épaisseurs ne peuvent pas être obtenues en laminage à chaud, pour plusieurs raisons :

- Du fait des dilatations thermiques (des outils surtout), il est difficile d'obtenir une grande précision géométrique à chaud, nécessaire aux produits fins.
- Une bande très mince se refroidit très rapidement, sa dureté augmente, les transformations de phase peuvent se produire et le contrôle du procédé peut devenir difficile.
- La surface oxydée d'une bande laminée à chaud est de piètre qualité pour beaucoup d'applications, il est nécessaire de relaminer à froid de toutes façons.
- Une déformation à froid suffisante doit être réservée pour atteindre les propriétés mécaniques voulues.

Lors de la deuxième phase à froid, le procédé de laminage est orienté vers des gammes d'épaisseurs plus faibles, qui sont inaccessibles par le laminage à chaud et qui peuvent descendre en dessous de la centaine de micromètres (de 3~4mm jusqu'à 0.7~0.8 mm pour les tôles de construction automobile) [6]. A ce stade, les caractéristiques mécaniques (emboutissabilité, résistance...), l'aspect de surface (aptitude aux traitements de surface et à l'emboutissage, rugosité contrôlée...) et la planéité, font l'objet d'une attention constante. En dépit du haut niveau d'expérience acquise au cours de décennies de pratique, des études et recherches très actives restent nécessaires pour améliorer la qualité dans des conditions toujours plus difficiles, du fait de l'augmentation des vitesses et de la dureté des nouveaux alliages.

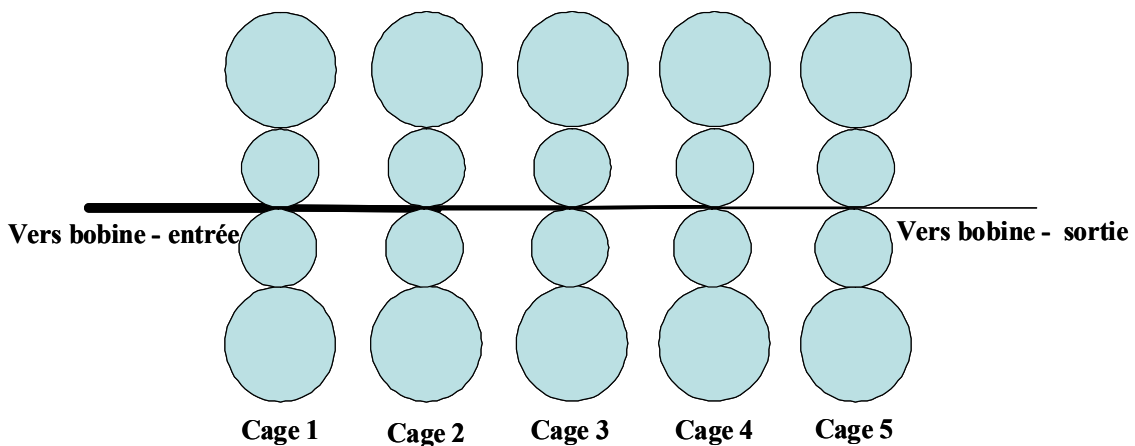


Figure 1-2. Schéma simplifié d'un train tandem de laminage à froid.

## 1.2 Problèmes géométriques en laminage : défauts de planéité

On distingue deux types de défauts de planéité (cf. figure 1-3):

- Des défauts de planéité non développables, tels que les défauts appelés bords longs ou centre long ;
- Des défauts de planéité développables, tels que les défauts de cintre, tuile et vrillage.

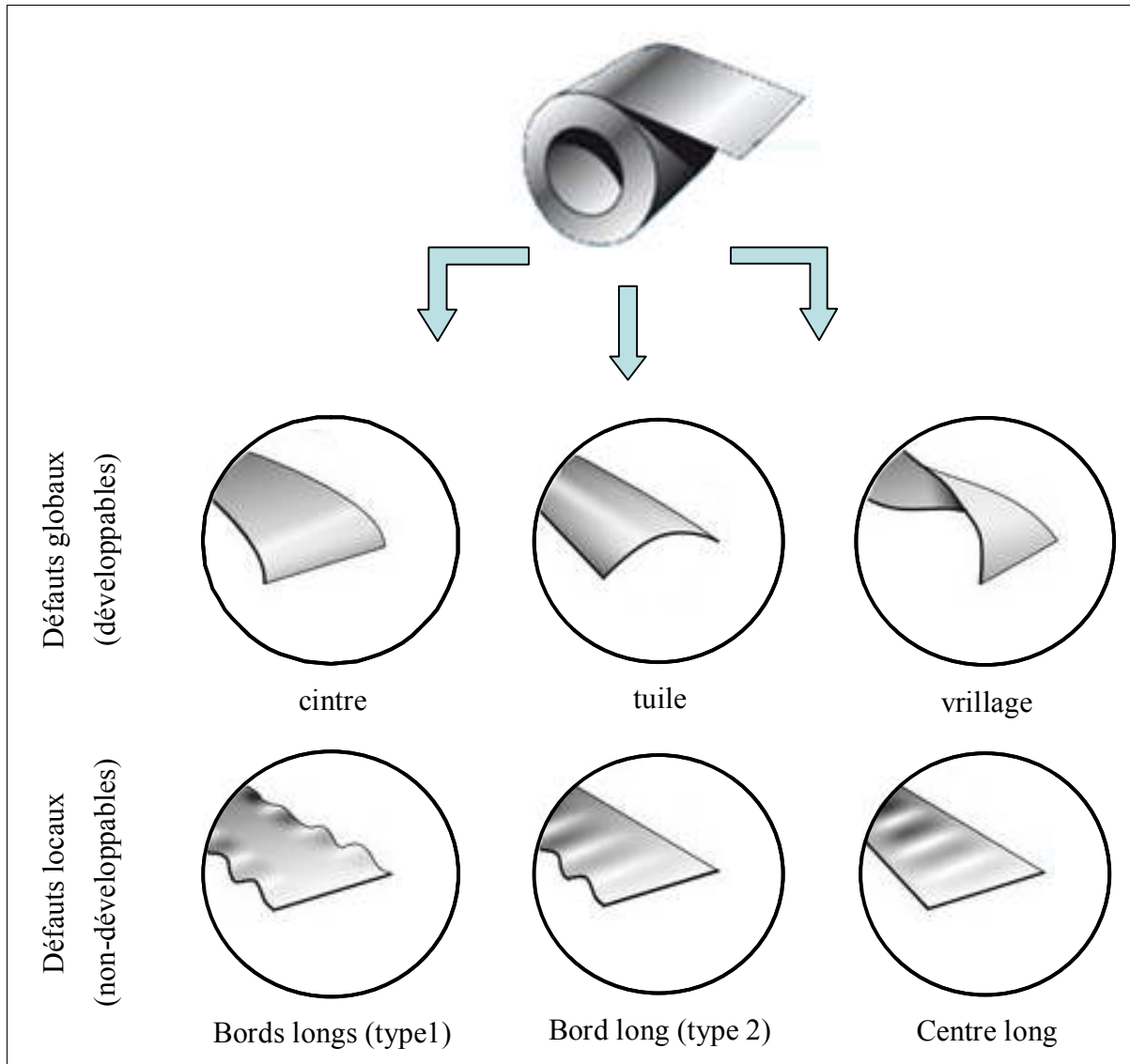


Figure 1-3. Différents types de défauts de planéité rencontrés en laminage.

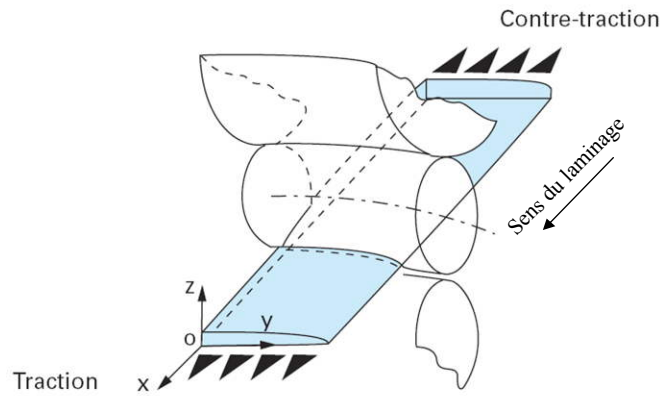
### 1.2.1 Origine des défauts de planéité

Sous les chargements intenses du laminage à froid, la déformation des cylindres (définis dans les paragraphes 1.3.2 et 1.3.3) peut atteindre des déplacements verticaux supérieurs à l'épaisseur de la tôle. On conçoit que cela doit avoir des effets significatifs sur le laminage. On analyse souvent cette déformation des cylindres en termes de flexion (de l'axe du cylindre considéré comme une poutre) et d'aplatissement (raccourcissement d'un rayon sous l'effet de la contrainte de contact compressive) ; à ces effets élastiques s'ajoute le bombé thermique, produit de la dilatation hétérogène liée au champ de température complexe du cylindre. La figure 1-4 illustre ces composantes. La forme résultante du cylindre de travail dans l'emprise provoque un gradient transverse d'élongation du produit laminé en sortie de l'emprise. Ce phénomène engendre des contraintes en intercage, qui peuvent demeurer suffisamment compressives dans certains endroits de la tôle et entraîner le flambage, désigné dans ce contexte comme défaut de planéité non développable (figure 1-3).



Il n'y a pas que la déformation des cylindres qui contribue aux défauts géométriques de la tôle. En effet, une anomalie de distribution des vitesses ou des efforts de frottement entre les deux faces de la tôle – c'est-à-dire entre les compartiments supérieur et inférieur de la cage (à cause d'un mauvais contrôle des vitesses des cylindres ou de la lubrification par exemple) – entraîne une hétérogénéité de l'élongation dans l'épaisseur de la bande. Ce type d'anomalie engendre également l'apparition de contraintes résiduelles hétérogènes dans l'épaisseur de la tôle, particulièrement dans le cas de faibles réductions.

Le moment fléchissant ainsi créé entraîne une flexion générale de la tôle. On ne peut pas parler de flambage, car celui-ci se définit comme un déplacement hors plan d'un point de la bande, en réponse à des contraintes de compression dans le plan de celle-ci. On parlera donc ici de flexion qui donne naissance aux défauts de planéité développables (cintre, tuile, etc. : cf. figure 1-3).



**Figure 1-4. La déformation élastique de la cage lors du laminage combinant : l'aplatissement, la flexion et l'indentation.**

### 1.2.2 Notion de défauts de planéité latents et défauts de planéité manifestes

Au cours du laminage, la tôle est souvent soumise à une traction (traction de débobinage, d'intercage, de bobinage ...) capable de masquer la totalité ou une partie des défauts de planéité (cf. § 1.3.8). Ainsi, dans certains cas, la tôle peut paraître plus ou moins plate, ou même parfaitement plate, sur la ligne de laminage. Il n'empêche que l'on peut quand même parler de défauts de planéité, dans la mesure où il peut y avoir des contraintes résiduelles qui, par exemple, se manifesteront sous forme de vrillage d'un flan après découpe. La distribution de ces contraintes internes ou résiduelles dans la tôle est donc appelée défaut de planéité latent, qui peut devenir ultérieurement manifeste par la découpe. Ce défaut de planéité latent peut être estimé à partir des mesures de contraintes explicites plus bas. Dans d'autres cas, l'hétérogénéité de contrainte est telle que même sous tension, le seuil de flambement est atteint et des déplacements hors plan apparaissent : c'est un défaut de planéité manifeste.

La réalité peut aussi être hybride. Le flambement relaxe les contraintes internes quand il se produit. Mais la relaxation peut être partielle et il peut rester, en plus d'un défaut manifeste, un défaut latent résiduel, qui là encore peut conduire à une amplification du défaut lors de la découpe.

Sur la figure 1-5-a, on montre un exemple de défaut de planéité latent en sortie d'une cage, qui correspond à une valeur négative de la différence  $\sigma_{xx}$ -Traction aval, et qui se transforme en défaut de planéité manifeste après la découpe comme on le montre sur la figure 1-5-b. C'est un exemple de simulation numérique d'un cas de laminage décrit dans le tableau 1 dans l'annexe 4, à l'aide d'un modèle de laminage développé et détaillé chapitre 6.

Quel que soit le type de défaut, latent ou manifeste, son élimination complète est quasi-impossible. On pratique toutefois deux procédés annexes au laminage, très importants. Le recuit a pour premier objectif la restauration par recristallisation de la ductilité du métal en vue de sa mise en forme ultérieure. Il élimine *in fine* les contraintes résiduelles. Un recuit de détensionnement, à plus basse température, pourrait éliminer les défauts latents, mais ne corrigerait pas non plus les défauts manifestes. On est donc conduit à utiliser en complément un procédé de planage. Un planage par traction avec faible déformation plastique, sur des feuilles découpées, permet d'éliminer

la plus grande partie des défauts latents comme manifestes. Pour garder un procédé continu, on pratique le planage sur des planeuses à rouleaux, par lesquelles une série de petites flexions, avec des petites déformations plastiques d'amplitude décroissante, corrige considérablement les défauts de planéité pour rester dans les marges de tolérances fixées par le client.

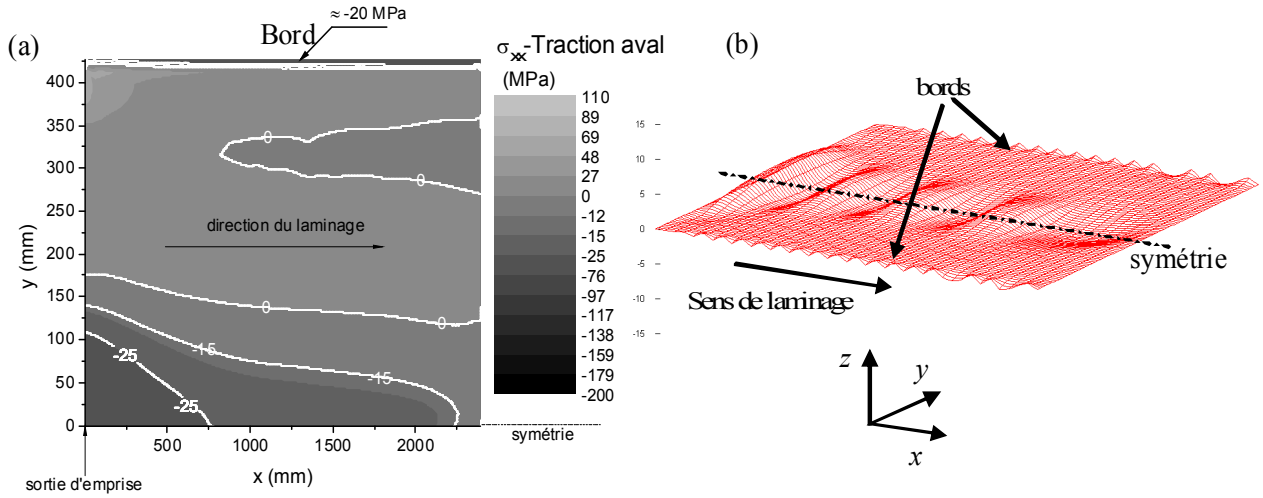


Figure 1-5. (a) : défaut de planéité latent, (b) défaut de planéité manifeste.

### 1.2.3 Quantification des défauts de planéité

Les défauts de planéité sont quantifiés à partir d'une grandeur «  $IP$  » (index de planéité) mesurable expérimentalement. En une position donnée de la largeur, cette grandeur est souvent définie comme le rapport de l'allongement d'une « fibre » matérielle par rapport à une longueur de référence (eq. (1.1)).

$$IP[UI] = \frac{L - L_{ref}}{L_{ref}} \times 10^5 \quad (1.1)$$

$IP$  : index de planéité.

La longueur de référence  $L_{ref}$ , qui varie d'une convention à une autre, doit être choisie avec prudence. En fait, l'utilisateur des instruments de mesures de planéité, qui définit la longueur de la fibre en rive comme une longueur de référence, est confronté à l'imprécision des mesures à cet endroit. Cette difficulté est due d'une part au phénomène de chute en rive, et d'autre part au fait que parfois le capteur de mesure à cet endroit peut ne pas être totalement couvert par la tôle.

Afin de s'affranchir de ce problème, deux solutions sont possibles.  $L_{ref}$  est définie comme :

- la longueur de la fibre centrale ;
- la longueur de la fibre la plus courte ;
- la longueur de la fibre le long de laquelle la composante longitudinale du champ de contraintes résiduelles reste la plus proche de la traction imposée, à un endroit où des mesures sont prises.

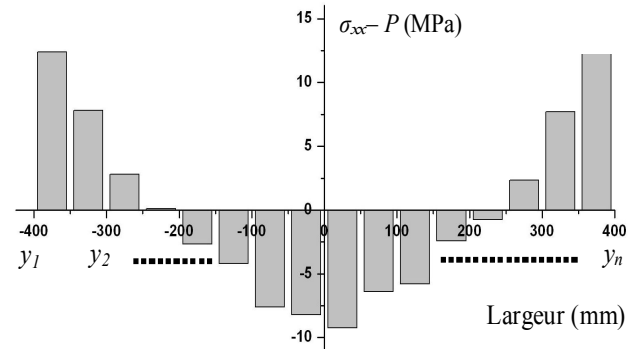
En revanche, cette grandeur, caractérisant le défaut de planéité, ne peut pas être directement déduite quand le défaut est caché sous l'effet de la traction au cours du laminage. D'autre part, elle est généralement supposée comme étant une déformation élastique longitudinale reprise par le flambage de chaque fibre matérielle quand la traction est relâchée. En conséquence, elle peut

être exprimée en fonction du profil de la contrainte longitudinale résiduelle (ou défaut latent), mesuré suivant une section transversale de la tôle, et le module d'Young du matériau :

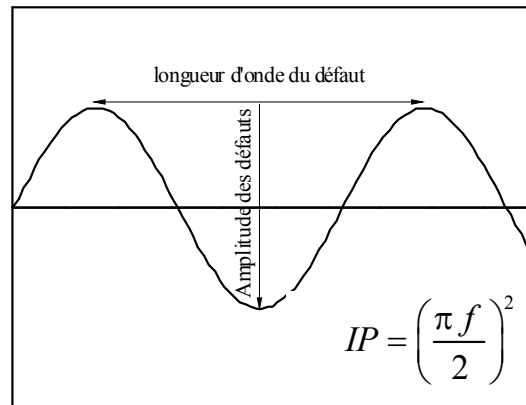
$$IP[UI] = \frac{1}{E} (\sigma_{yi} - P) \times 10^5 \quad (1.2)$$

$\sigma_{yi}$  : valeur de la contrainte longitudinale mesurée en chaque point situé à la position  $y_i$  de la largeur de la tôle (cf. figure 1-6).  $P$  est la contrainte de traction moyenne.

Les expressions mentionnées dans les équations (1.1) et (1.2) permettent de qualifier l'ampleur d'un défaut, mais ne sont pas assez consistantes pour identifier sa géométrie. Pour cela, une formule dite de « steepness » est utilisée, supposant que le défaut engendré par le flambement a une forme de demi-onde sinusoïdale. L'évaluation d'un défaut implique alors le rapport  $f$  entre la flèche et la longueur de cette demi-onde, est exprimé en pourcentage (%). Afin de se ramener à une valeur exprimée en UI, ce rapport s'établit comme indiqué sur la figure 1-7 en supposant que l'ondulation a une forme sinusoïdale.



**Figure 1-6. Un exemple (réel [5]) de mesure du profil de la planéité latente suivant la largeur de la tôle au cours du laminage, en utilisant un rouleau de planéité.**



**Figure 1-7. Forme d'une fibre matérielle ondulée approchée par une fonction sinusoïdale. Noter la flèche, la longueur d'onde, et leur rapport  $f$ .**

Ces diverses caractérisations des défauts de planéité donnent une estimation globale de la qualité du produit, à partir d'une valeur en UI déterminée par comparaison entre une position donnée en largeur (le centre par exemple) et les rives (souvent prises conventionnellement à 40 mm de la vraie rive). On peut aller plus loin et utiliser non une valeur unique, mais une valeur variant en fonction de la largeur. Pawelski [11] propose une évaluation de l'indice de planéité  $IP$  dans la largeur de la bande suivant deux paramètres  $a_2$  et  $a_4$  selon une formule biquadratique décrivant la forme du défaut à une section transversale donnée. L'expression du défaut est alors :

$$IP[UI] = a_2 \left( \frac{2y}{b} \right)^2 + a_4 \left( \frac{2y}{b} \right)^4 \quad (1.3)$$

La forme des défauts que décrit la relation (1.3) n'est pas immédiatement perçue sans s'appuyer sur la figure 1-8. Cette figure permet de distinguer les différents types de défauts latents en fonction des coefficients  $a_2$  et  $a_4$ . En outre, en adoptant la relation (1.3), le défaut est supposé symétrique par rapport au centre de la tôle, ce qui n'est pas toujours vrai pour un grand nombre de cas de laminage.

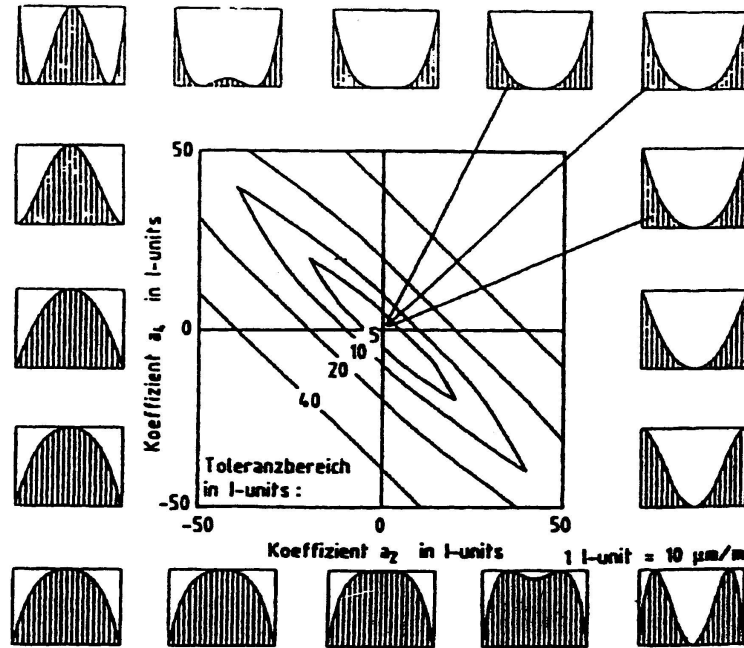


Figure 1-8. Exemple d'abaque permettant de distinguer le type et l'ampleur du défaut de planéité latent en UI suivant les paramètres  $a_2$  et  $a_4$  de la relation (1.3) [11] : les profils montrés représentent la forme du différentiel d'élongation suivant la largeur de la tôle en aval de l'emprise.

## 1.2.4 Quelques dispositifs et méthodes utilisés pour les mesures des défauts

### 1.2.4.i Mesures en ligne

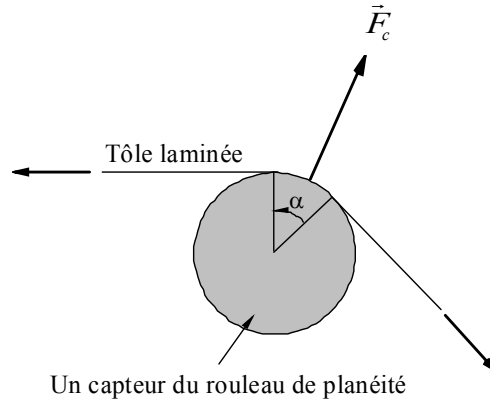
#### a) Mesures des défauts de planéité latents

##### Par la mesure des contraintes internes :

Au cours du laminage, lorsque les défauts de planéité sont latents, le seul moyen possible de les quantifier est de mesurer les contraintes internes. Dès lors, les défauts de planéité sont déduits de l'hétérogénéité de la contrainte longitudinale suivant la largeur de la bande. Un rouleau de planéité (ou stressomètre) est placé à une distance de l'ordre de 3 à 4m en aval d'une cage. Il est composé de plusieurs segments de 52 mm de largeur  $b_c$  chacun. Chaque segment est en fait un capteur de force de contact avec la bande en défilement (cf. figure 1-9). C'est à partir de cette force résultante  $F_c(y)$  qu'il est possible de déduire la contrainte résiduelle longitudinale dans la bande  $\sigma_{xx}(y)$  suivant la relation ci-dessous :

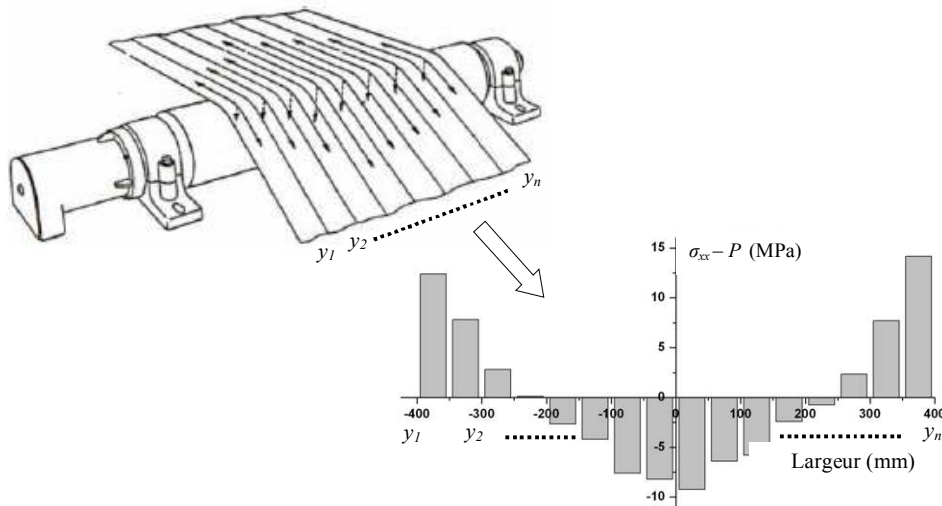
$$\sigma_{xx}(y) = \frac{F_c(y)}{2h(y) \times b_c \times \sin\left(\frac{\alpha_c}{2}\right)} \quad (1.4)$$

$h(y)$  est l'épaisseur suivant la largeur de la bande et  $\alpha_c$  désigne l'angle de contact entre la bande et chaque capteur du stressomètre.



**Figure 1-9. Description du passage d'une tôle sur un capteur du rouleau de planéité (stressomètre).**

De cette manière, il est possible de reconstituer le profil de la contrainte  $\sigma_{xx}$  à travers la largeur de la bande, avec une résolution spatiale de 52 mm, afin de prédire une estimation du défaut qui pourrait se révéler dès l'élimination de la traction du laminage (cf. figure 1-10).



**Figure 1-10. Profil du défaut latent suivant la largeur de la tôle au cours du laminage, qui est reconstitué à partir de différentes mesures fournies en chaque position  $y_i$  par les capteurs du rouleau de planéité.**

Ce type d'instrument est capable de révéler les défauts cachés sous l'effet d'une traction de laminage assez élevée. Néanmoins, il est limité par plusieurs sources d'incertitudes sur les mesures mentionnées par Steinier et al. [12] :

- Les mesures prises par les rouleaux de planéité peuvent contenir des contraintes internes provenant d'un gradient thermique à travers la bande. Dans ce cas, les défauts de planéité latents ne sont plus représentatifs du produit refroidi. Toutefois, la compensation de cette

perturbation est possible en retranchant la contribution de la température, calculable par la thermo-élasticité. Cela nécessite une mesure de la température en chaque point de mesure de contrainte, ce qui est possible en utilisant des caméras infra-rouge.

- Un mauvais alignement des rouleaux de planéité avec les cages du tandem, qui peut être évité à l'aide d'un système de contrôle automatique ajustant l'alignement de ces rouleaux.
- Un recouvrement partiel des zones des extrêmes rives de la bande, qui signifie que le bord de la bande se trouve au milieu de l'un des capteurs du rouleau de planéité. A cet état, une correction peut être apportée sur l'équation (1.4), en ajustant  $b_c$  à la largeur réelle de recouvrement du capteur par la tôle (uniquement à l'endroit où le recouvrement n'est pas total : c'est-à-dire à l'extrême rive).

### Remarque 1 :

Sur un pupitre de contrôle, on observe souvent, superposée au profil, une valeur  $P$ , contrainte moyenne de traction, soit  $F_{tr}/b \cdot h_{moy}$ .  $F_{tr}$  est la force de traction appliquée entre deux cages successives,  $b$  et  $h_{moy}$  sont respectivement la largeur de la tôle et l'épaisseur moyenne<sup>2</sup> de la tôle.

### Par la mesure des vitesses [13] :

Au cours du laminage, suite à un différentiel d'élongation des fibres matérielles en sortie de l'emprise, celui-là même qui conduit aux défauts de planéité, un gradient transverse de vitesse de déformation se produit. Ce gradient s'atténue plus loin de la cage et la tôle retrouve un mouvement de corps rigide. Partant de ce principe, Person [13] a développé un dispositif composé de plusieurs galets placés très près de la sortie de l'emprise. En roulant sur la tôle en défilement, ils sont capables de mesurer le gradient transverse de la vitesse (ou d'élongation)  $\Delta V/V_{ref}$  de la matière, à partir de laquelle il est possible de quantifier le gradient d'élongation, d'où le défaut de planéité  $\Delta L/L_{ref}$  en UI (cf. équation (1.1)).  $L$  et  $V$  sont respectivement l'élongation d'une fibre et la vitesse locale, et  $V_{ref}$  est une vitesse de référence à une position donnée dans la largeur de la tôle, par exemple au centre. Toutefois, bien que cette méthode soit peu coûteuse, elle est limitée par le faible nombre de fibres mesurées en raison de l'encombrement des galets. De plus, les mesures par cette méthode peuvent être perturbées par :

- Le glissement des rouleaux sur la surface de contact avec la tôle.
- Le passage d'un défaut de planéité manifeste, apparent en ligne, sous les galets.

### b) Mesure des défauts de planéité manifestes

Les mesures des défauts de planéité manifestes consistent à repérer les défauts géométriques de la tôle (ondulations, plis, « frisettes »...). Les appareils de mesure les plus répandus utilisent des moyens optiques, bien que d'autres systèmes basés sur les propriétés électroniques et électromagnétiques soient développés (le Méplaca par exemple [14]). En outre, ces différents types de techniques de mesures sont généralement sans contact entre l'appareillage et le produit, ce qui évite de créer des défauts de surface (rayures).

### Coupe optique [15]

Le procédé de la coupe optique consiste à projeter une ligne lumineuse droite transversalement à la surface de la tôle à partir d'une source lumineuse (cf. figure 1-11). La projection de cette ligne décrira le profil de planéité manifeste suivant la largeur de la table, qui sera enregistré et stocké par un système d'acquisition. Un enregistrement périodique au cours du défilement de

---

<sup>2</sup> Epaisseur moyennée suivant la largeur de la table sur une section transversale de la tôle qui est souvent non rectangulaire (cf. la définition du bombé tôle dans le paragraphe 1.3.5).

la tôle lors du laminage permet de reconstituer la forme tridimensionnelle de celle-ci. Cependant, cette méthode demande un temps d'acquisition assez long pour une précision de mesure peu satisfaisante.

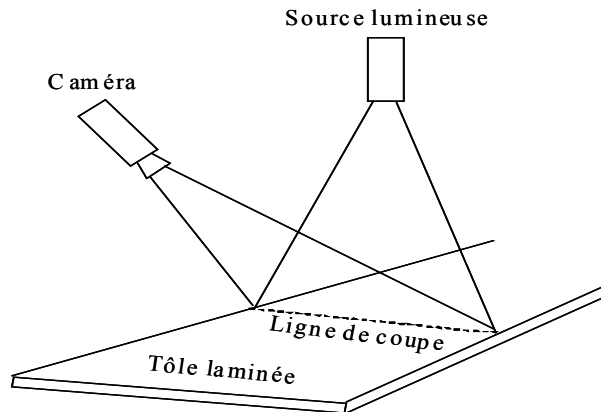


Figure 1-11. La coupe otique.

### La méthode des moirés [16,17]

La méthode des moirés consiste à projeter une grille lumineuse (ou une série de lignes lumineuses perpendiculaires au sens du laminage [17]) sur la surface de la tôle (cf. figure 1-12). Les défauts géométriques de cette dernière causent une distorsion de la grille ; cette distorsion, superposée à l'image initiale, forme une image de moiré capable de décrire les défauts de planéité manifestes, et enregistrée à l'aide d'une caméra CCD. En revanche, les défauts de planéité instantanés (de type bords longs ou centre long par exemple) présentent une certaine difficulté pour ce type de mesures. De ce fait, des prises séquentielles de mesures à des temps d'acquisition suffisamment courts, et synchronisés par rapport à la vitesse du laminage, sont nécessaires dans le but de décrire la planéité du produit au cours de son défilement. Toutefois, cette procédure ne sera plus assez précise pour des vitesses de laminage élevées.

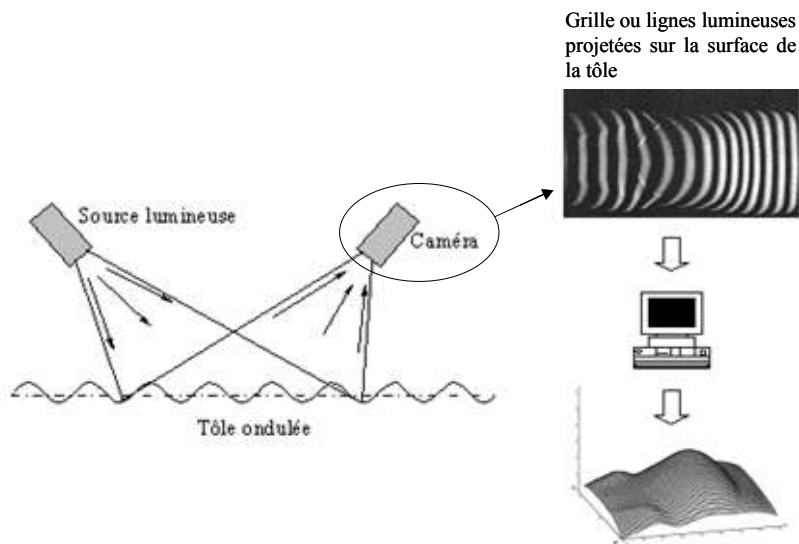


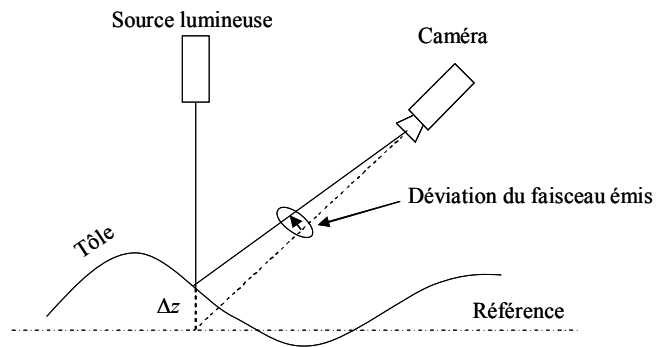
Figure 1-12. Visualisation des défauts de planéité manifestes d'une tôle à l'aide de la méthode de moirés.

**Remarque 2 :**

Les grilles ou les lignes lumineuses qu'on vient de citer, peuvent être de différentes natures. Elles peuvent provenir d'une projection de rayons laser qui forment des lignes (ou une grille) sur la surface de la tôle. Ou bien ce sont des franges provoquées par l'interférence de deux ondes lumineuses provenant de deux sources différentes (ce qui est le cas de la figure montrée ci-dessus : figure 1-12).

**La télémétrie à balayage [18]**

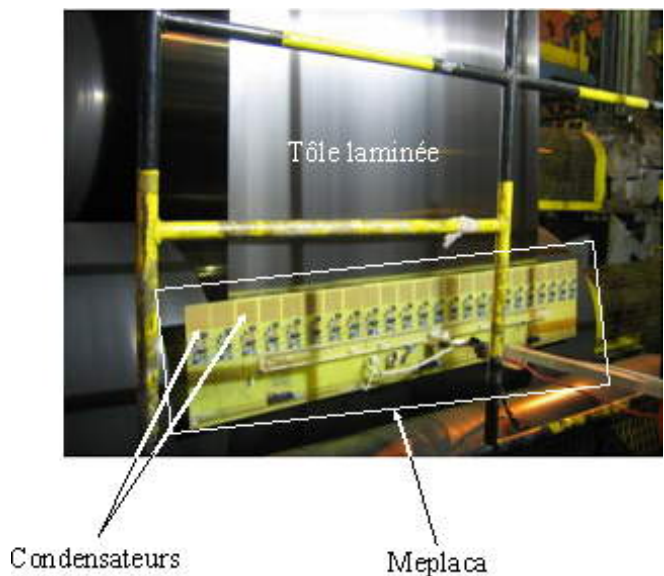
Cette méthode ressemble aux précédentes, sauf qu'ici un faisceau laser est projeté perpendiculairement à la surface de la tôle (cf. figure 1-13). Une caméra CCD est capable de repérer le point d'impact et de définir sa position spatiale par rapport à une référence. À partir de l'altitude de ce point, on est alors capable de déduire localement l'amplitude du défaut manifeste. De plus, afin de balayer toute la surface de la tôle, un miroir est souvent mis en place permettant de dévier le faisceau laser d'un point d'impact à un autre, ce qui limite cette procédure aux faibles vitesses de laminage.



**Figure 1-13. La technique de mesure des défauts manifestes d'une tôle à l'aide de la méthode de télémétrie à balayage.**

**Le « Meplaca » [14]**

C'est un dispositif qui a été récemment mis au point par ArcelorMittal et qui fait encore l'objet de quelques améliorations. Le « Meplaca » est une série d'armatures de condensateurs alignés selon la largeur de la tôle en défilement, à une distance de quelques centimètres (5 à 10 cm) de la surface de celle-ci (cf. figure 1-14). Au cours du défilement de la tôle, le Meplaca enregistre les variations de tension électrique correspondant à la distance qui sépare les armatures de chaque condensateur de la surface de la tôle. Cela nécessite alors un calibrage liant ces deux grandeurs (cf. figure 1-15). De cette manière, une cartographie décrivant la forme géométrique du produit est déduite, comme le montre la figure 1-16. Ce dispositif est peu coûteux par rapport aux autres précédemment cités, mais est astreint à respecter une distance de séparation adéquate. La distance doit être suffisante pour que le dispositif ne soit pas heurté par la tôle, quand elle présente des défauts géométriques de forte amplitude. Mais la tôle doit être assez proche pour ne pas perdre le signal électrique généré par les condensateurs.



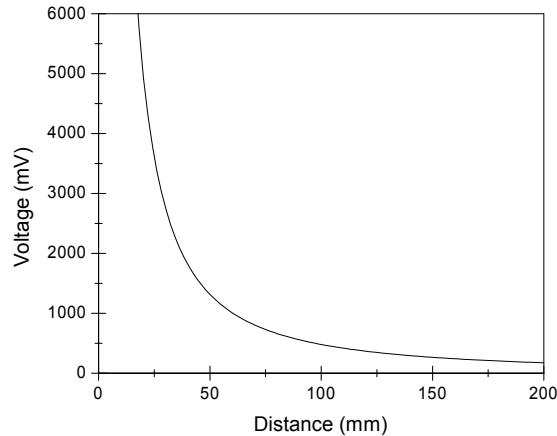
**Figure 1-14. Le Meplaca [14].**

**Remarque 3 :**

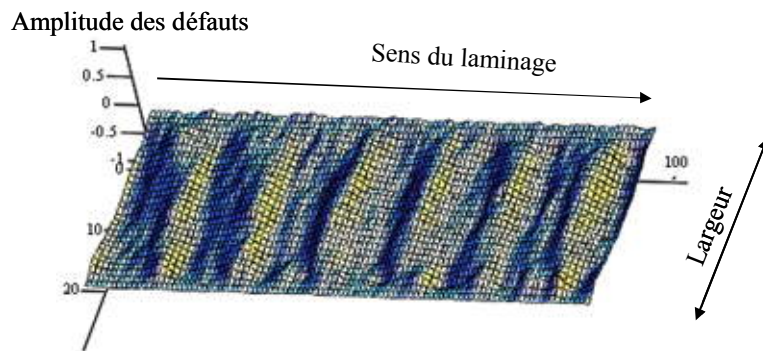
Dans certains cas de laminage, en particulier pour de très faibles réductions, un différentiel d'élongation suivant l'épaisseur est fréquemment rencontré, avec les gradients de contraintes résiduelles correspondants. Pour des épaisseurs de tôle assez faibles, la mesure de ces contraintes



résiduelles ou des défauts latents suivant l'épaisseur est très difficile. Ainsi, ce que mesurent les rouleaux de planéité par exemple, est le profil transversal de la moyenne dans l'épaisseur de la contrainte interne longitudinale. Ce problème ne se pose pas dans les cas de faibles épaisseurs et à forte réduction, où le gradient des contraintes résiduelles suivant l'épaisseur de la tôle est négligeable.



**Figure 1-15. Courbe de calibration des capteurs du Meplaca : relation entre la distance qui sépare un capteur de la surface de la tôle et la tension électrique enregistrée [14].**



**Figure 1-16. Un exemple de défaut de planéité manifeste mesuré par le Meplaca [14].**

Toutes ces techniques de mesures en ligne sont généralement confrontées aux problèmes de vibration et aux états de surface de la tôle, pouvant entraîner des erreurs d'estimation des défauts de planéité. En outre, les équipements doivent être protégés contre la température générée lors du laminage, en particulier en laminage à chaud, et contre la vapeur dégagée pour éviter leur dégradation.

#### 1.2.4.ii Mesures hors ligne

Une mesure hors ligne est prise sur une portion (échantillon) de tôle découpée et posée sur une table ou suspendue.

Les méthodes des moirés et la télémétrie à balayage optique, citées précédemment, sont notamment applicables dans le cadre de mesures hors ligne, tout en s'affranchissant des difficultés provenant de l'aspect instationnaire de certains types de défauts manifestes. Un autre principe, le

plus simple, consiste à mesurer à la règle les amplitudes des défauts géométriques (cf. figure 1-17). Par contre, comme mentionné dans le paragraphe 1.2.2, même si une tôle flambe quand elle est relâchée, il se peut que les contraintes résiduelles ne soient pas totalement relaxées. C'est en effet la raison pour laquelle Palkowski et al. [19] découpe en bandelettes l'échantillon considéré dans le sens du laminage. De cette manière, les défauts de planéité sont plus précisément quantifiés par cette méthode connue sous le nom de « *fendage* ». Il est clair que cette méthode n'est pas la plus sophistiquée, mais elle permet d'obtenir des mesures adéquates sans demander une instrumentation coûteuse. Par ailleurs, une méthode de mesure par rayons X, qui paraît plus avancée et non destructive, est capable de caractériser les défauts latents de la tôle risquant de se révéler chez le client. Par contre, cette méthode présente une certaine lourdeur de mise en œuvre. En effet, les défauts latents sont visualisés via l'effet des contraintes résiduelles sur les distances entre plans atomiques, mesurées par la diffraction des rayons X. Cette interaction dépend des caractéristiques intrinsèques et de la texture du matériau (propriétés mécaniques, anisotropie, etc...). La méthode a besoin d'une référence à contrainte nulle sur le même matériau. La difficulté réside donc dans le besoin d'une tôle ayant les mêmes propriétés, en particulier la même texture, sans contraintes résiduelles. Une solution proposée consiste à récupérer un bout de tôle de la même bobine après un recuit de détensionnement. Ce recuit permet d'effacer les contraintes résiduelles à l'issue du procédé du laminage, tout en conservant les propriétés mécaniques et la texture du produit.



**Figure 1-17. Mesure hors ligne et à la règle d'un défaut de planéité manifeste [1].**

### 1.3 Quelques éléments techniques sur le laminage

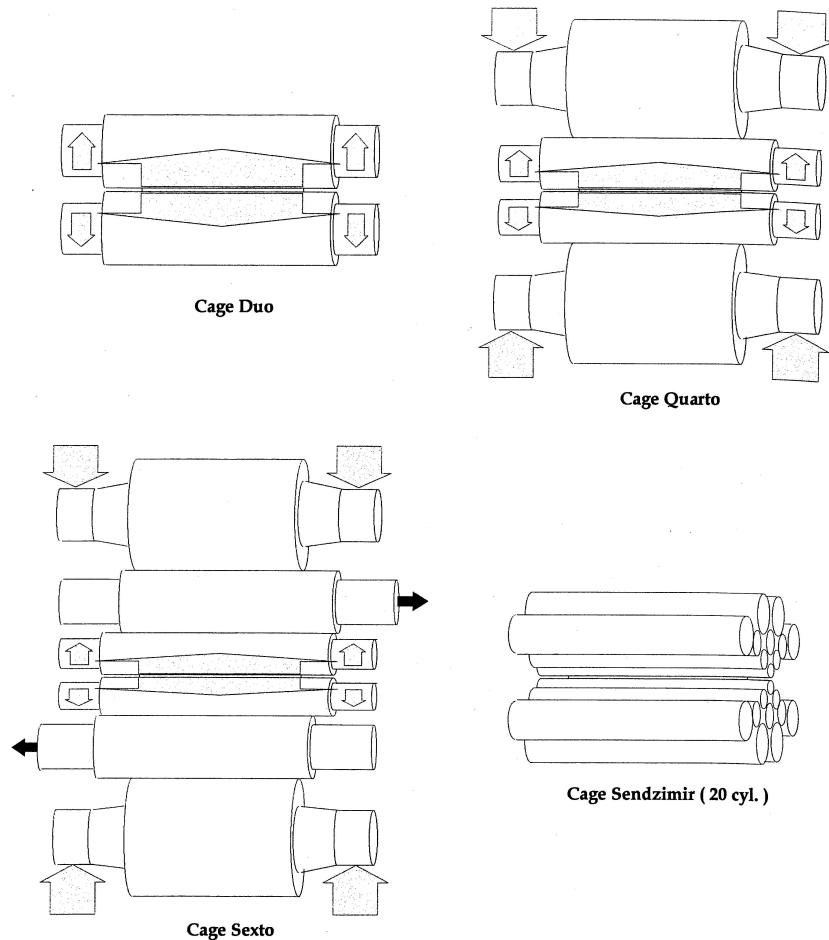
Dans ce paragraphe, on cite quelques éléments techniques qui permettent de contrôler le laminage. Ils offrent aux lamineurs la possibilité d'intervenir d'une manière ou d'une autre dans le but d'optimiser la qualité du produit, pour chaque bobine.

#### 1.3.1 Exemples de cages de laminoirs utilisées

La figure 1-18 illustre quelques types de cages que nous allons décrire, du plus simple au plus complexe. La plus simple est la cage *Duo* avec seulement deux cylindres de travail (cf. §1.3.2) de grands diamètres. Par contre, les cages *Quarto* sont constituées également de deux cylindres de travail, mais de plus faible diamètre, et qui sont soutenus par deux cylindres d'appui ayant un gabarit plus important (cf §1.3.3). Dans les cages *Sexto*, des cylindres d'appui intermédiaires additionnels permettent un contrôle plus fin de la planéité grâce aux possibilités offertes par leur translation latérale [20]. Enfin, les cages *Sendzimir* sont beaucoup moins conventionnelles : vingt cylindres sont disposés en grappe ; les cylindres de travail sont de faible rayon. Ce type de cages

permet le laminage des produits très durs et minces tels que les aciers inoxydables [20]. On notera que plus les cylindres d'appui sont nombreux, plus les cylindres de travail peuvent être petits.

Notons qu'un train tandem n'est pas forcément constitué d'un seul type de cage : on associe parfois des cages *sexto* à des *quartos*, à des positions critiques, pour assurer au mieux le contrôle de la planéité.



**Figure 1-18. Différents types de cages de laminoirs couramment utilisés : les flèches représentent des efforts qui sont mis en jeu au cours du laminage [5].**

### 1.3.2 Cylindres de travail

Les cylindres de travail sont les principaux éléments de la cage en contact avec la bande à laminier. Les efforts de laminage exercés par les actionneurs sont transmis à cette dernière dans la zone de contact connue sous le nom d'« emprise ». Par ailleurs, le diamètre de ces cylindres a un effet déterminant sur la longueur de contact. D'une part, en l'absence de déformation élastique, la longueur de contact est approximativement en  $\sqrt{R \cdot \Delta h}$  ( $R$  est le rayon des cylindres de travail et  $\Delta h$  est la réduction de l'épaisseur de la tôle). La force de laminage croît donc mécaniquement au moins comme  $\sqrt{R}$ . D'autre part, l'aplatissement des cylindres, fonction de la force de laminage elle-même fonction croissante de la longueur de contact, amplifie encore cet effet. C'est ainsi qu'on peut mettre en évidence, en laminage à froid, l'influence considérable du diamètre sur l'énergie consommée lors du laminage (c'est-à-dire sur le couple de laminage), ainsi que sur la qualité du produit laminé (en particulier sur la planéité). Les études théoriques montrent que la pression de contact dans cette zone et l'effort de laminage sont de plus en plus faibles quand le

rayon des cylindres de travail diminue. Il en va de même pour le couple, du fait d'un moindre travail dissipé par le frottement, ce qui va dans le sens d'une économie d'énergie. D'autre part, l'élargissement, non souhaitable, de la tôle est plus faible quand les cylindres de travail sont de faible rayon. Toutefois, minimiser ces diamètres doit respecter les limites technologiques acceptables.

Les avantages apportés par la réduction des diamètres des cylindres de travail font partie des raisons, parmi d'autres, pour lesquelles les laminoirs *Sexto* et *Sendzimir*, respectivement à 6 et à 20 cylindres, ont été inventés et utilisés par un certain nombre de groupes industriels. En revanche, les laminoirs *Quarto* se sont imposés par leur simplicité comme laminoirs courants pour le laminage à froid [7].

### 1.3.3 Cylindres d'appui

Les cylindres de travail de faible diamètre sont susceptibles de fléchir, ce qui incite à l'utilisation des cylindres d'appui. Ces cylindres d'appui sont généralement de rayon plus grand que celui des cylindres de travail qu'ils soutiennent, afin d'être suffisamment rigides pour empêcher leur flexion. Cela minimise l'hétérogénéité de la réduction d'épaisseur et de la répartition de l'effort du laminage dans la largeur du produit dans l'emprise, et permet de limiter les défauts de planéité (cf. §1.2). Enfin, l'effort de laminage est une traduction de l'effort de serrage exercé sur les cylindres d'appui, à partir duquel la planéité du produit sera contrôlée.

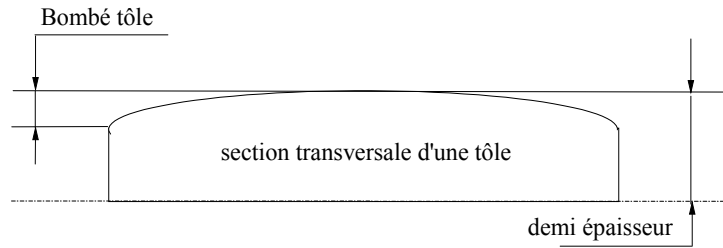
### 1.3.4 Bombé thermique

L'échauffement des cylindres de travail lors du laminage, qui a plusieurs origines (déformation plastique de la tôle, frottement,...), induit une expansion thermique des outils. Cette expansion est la plupart du temps hétérogène dans l'emprise, en particulier dans le sens transversal de la table, suivant lequel un gradient thermique est souvent observé. Cet échauffement est contrôlé par un système d'arrosage des cylindres et de la bande à raison de plusieurs dizaines de mètres cubes par minute [21]. En effet, si cet échauffement n'était pas absorbé par l'arrosage, les températures du produit et de l'outil pourraient atteindre ou dépasser les 200°C, ce qui poserait des problèmes de planéité impossibles à gérer pour deux causes principales :

- bombé thermique excessif des cylindres ;
- forts gradients de contraintes internes d'origine thermique dans le produit, cause supplémentaire de flambage.

### 1.3.5 Bombé tôle

Dès le laminage à chaud, dans la partie centrale sous l'emprise (au centre de la brame), les forces latérales de frottement s'opposent à l'écoulement transverse de la matière. Cet effet dû au frottement devient de plus en plus limité vers les rives, ce qui facilite la déformation latérale de la tôle laminée dans ces zones. De ce fait, la composante d'aplatissement de la déformation des cylindres de travail (cf. § 1.2.1) devient de moins en moins importante en rive, là où la déformation plastique est plus facile qu'au centre, d'où le bombé tôle. Cet aplatissement et la flexion des cylindres de travail conduisent à l'hétérogénéité transverse de l'épaisseur de la brame, qui est généralement plus épaisse au centre qu'aux bords. Le bombé tôle n'est pas considéré comme un défaut géométrique en soi, mais s'il est excessif, il joue un rôle déterminant dans la génération des défauts de planéité [22]. Le produit livré doit aussi respecter des tolérances en bombé (ou défaut de profil), pour des questions d'utilisation sur les lignes de mise en forme ultérieure.



**Figure 1-19. Représentation simplifiée d'une coupe transversale d'une tôle présentant un bombé : « bombé tôle ».**

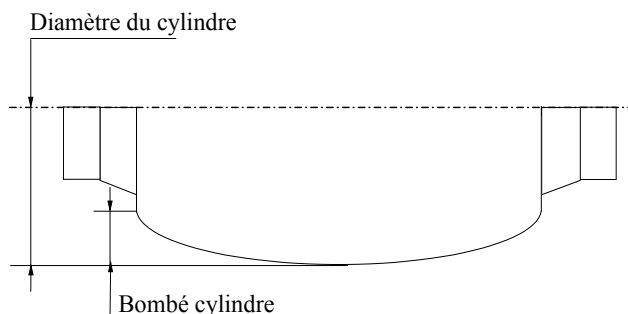
#### Remarque 4 :

La plupart du temps, la diminution de l'épaisseur est plus importante en rives : « chute en rive ». Ce mécanisme est nettement plus faible en laminage à froid, où l'épaisseur devient très petite par rapport à la largeur. En revanche, le « bombé tôle » reste conservé et omniprésent depuis le laminage à chaud, malgré les techniques adoptées afin de le limiter. Parmi ces techniques, on distingue le « bombé cylindre » (cf. § 1.3.6) qui a pour but de compenser le « bombé tôle ».

### 1.3.6 Bombé cylindre

Le « bombé cylindre » décrit la variation du diamètre d'un cylindre entre le centre et les extrémités de celui-ci. Il est de l'ordre de quelques centièmes de millimètres et il constitue une pré-compensation de la flexion globale de la cage. Le « bombé cylindre », en particulier le bombé des cylindres de travail, est une alternative déterminante pour contrôler la planéité du produit. En fait, les bombés de rectification des cylindres d'un tandem à froid (de forme parabolique) sont généralement dimensionnés pour pouvoir viser une planéité en léger centre long en première et dernière cage. Cela permet l'auto-centrage de la bande dans le laminoir. Sur les cages intermédiaires, une planéité en bords longs est plutôt visée pour limiter les ruptures de bandes, car sur un train tandem, les niveaux de traction sont très élevés sur les cages intermédiaires. A la sortie des tandems, la traction est beaucoup moins élevée (traction bobineuse), là où généralement des rives tendues sont souhaitées.

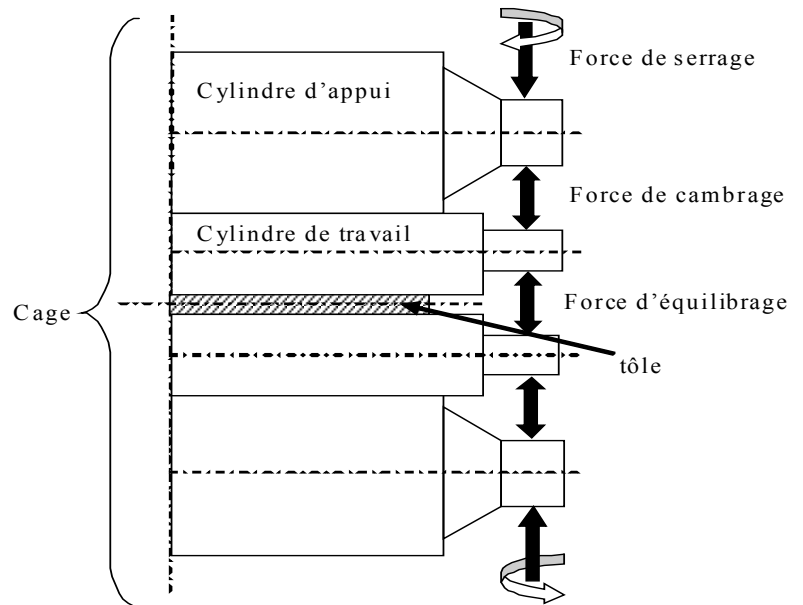
Le bombé nécessaire pour obtenir in fine une tôle plane varie en fonction du processus et des conditions de laminage. Par exemple, une cage *Quarto* fléchit de manière très différente d'une largeur du produit laminé à une autre : idéalement, des gammes de bombés différents doivent être utilisés. Néanmoins, pour des raisons de productivité (changements de cylindres moins fréquents) de plus en plus de tandems utilisent un unique bombé de rectification sur le cylindre de travail, quelle que soit la largeur du produit laminé. Mais cette pratique se fait au détriment de la qualité du produit.



**Figure 1-20. Schéma représentatif d'un cylindre d'un laminoir présentant un bombé : « bombé cylindre ».**

### 1.3.7 Serrage et équilibrage des cylindres

Le système de serrage applique des efforts sur les empoises d'appui qui, par les roulements, les transmettent aux cylindres d'appui (appelés aussi de soutien). C'est à partir de la régulation de ces efforts de serrage que l'épaisseur désirée du produit en sortie de cage est assurée. D'autre part, le poids des cylindres supérieurs (d'appui et de travail) est supporté en l'absence de bande par les forces d'équilibrage appliquées entre les empoises des deux cylindres de travail. Sous charge, les actionneurs « WORB » (Work Roll Bending) ou d'équilibrage s'opposent à la flexion des cylindres de travail. Par ailleurs, au cours du laminage, les lamineurs utilisent les « actionneurs FOX » ou de cambrage, qui sont des vérins situés entre les empoises des cylindres d'appui et des cylindres de travail, afin de modifier la flexion de ces derniers. De cette manière, ils modifient la répartition transversale de l'effort de laminage. Ainsi, ces deux types d'effort (cambrage - équilibrage) sont utilisés pour modifier certaines conditions de laminage tels que les profils géométriques des cylindres dans l'emprise, qui agissent considérablement sur la planéité du produit. Ces actionneurs permettent de corriger les défauts simples de bords longs ou de centres longs symétriques (cf. § 1.2.2). Par opposition à l'actionneur « figé » qu'est le bombé de rectification des cylindres présenté en § 1.3.6, l'adaptabilité de ces actionneurs est utilisée pour corriger d'une part les variations de flexion des cylindres liées aux variations des conditions de laminage d'une bobine à la suivante (force de laminage, liée à la variation de largeur, d'épaisseur et de dureté produit...), d'autre part pour compenser les perturbations de la planéité en cours de laminage d'une même bobine (variations intra-bobine de la dureté, du profil d'épaisseur entrante en sens travers ...).



**Figure 1-21. Illustration simplifiée des différents efforts mis en jeu et exercés par les actionneurs au cours du procédé de laminage.**

### 1.3.8 Traction en laminage

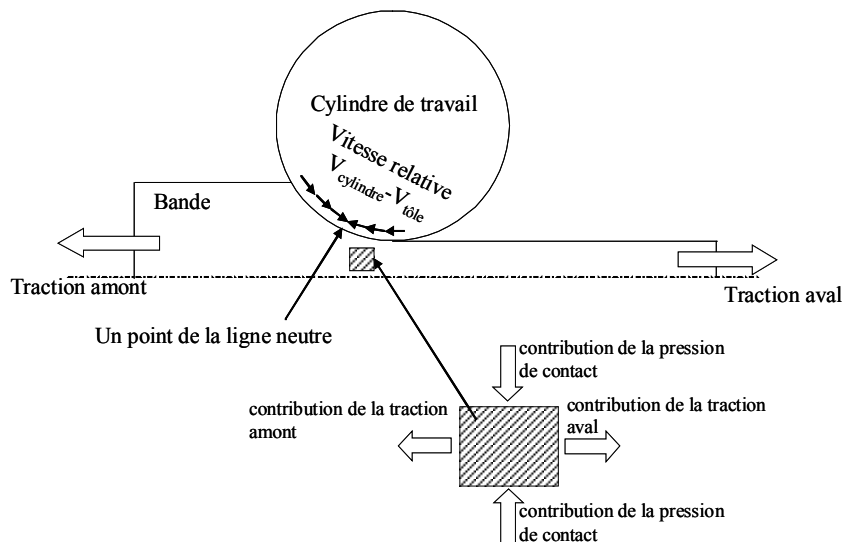
Les niveaux de traction couramment utilisés en laminage sont toujours nettement inférieurs à la limite élastique de l'alliage. Néanmoins, pour un laminoir de grande largeur, ceci conduit à des efforts considérables. La traction dépend de la nature de l'alliage, de la largeur et de l'épaisseur de la pièce laminée, etc...

Un premier effet important des tractions est leur action sur la ligne neutre. A l'entrée de l'emprise, la vitesse périphérique des cylindres de travail est plus importante que celle de la bande. Or, du fait de la réduction de l'épaisseur dans l'emprise, l'augmentation de la vitesse de la bande, par le principe de la conservation du débit de matière, inverse cette tendance. Ainsi, la vitesse relative de la bande par rapport à la vitesse périphérique des cylindres, passe d'une valeur négative à une valeur positive de l'amont vers l'aval. Par conséquent, cette vitesse relative (glissement) s'annule quelque part sous l'emprise, le long d'une « ligne neutre » (cf. figure 1-22). La position de cette ligne neutre est fortement sensible à la traction de laminage imposée de part et d'autre de l'emprise : elle est de plus en plus amenée vers l'amont si la bande est plus tirée en

aval, et vice versa. Un déséquilibre important entre les deux efforts de traction amont et aval peut provoquer un déplacement considérable de la ligne neutre. Si c'est la traction amont qui est trop forte, elle peut faire sortir la ligne neutre de l'emprise côté sortie, ce qui signifie une perte d'entraînement de la bande par les cylindres de travail : c'est ce que l'on appelle le patinage, qui se traduit souvent par une dégradation du contrôle de l'épaisseur et autres paramètres de laminage, d'où la détérioration du produit.

Les tractions permettent d'autre part de diminuer les pressions de contact et les forces de laminage. On peut expliquer ce phénomène par le fait que les tractions imposées en amont et en aval d'une cage sont transmises sous l'emprise, où elles vont intervenir dans le mécanisme de l'écrasement plastique de la bande (cf. figure 1-22). En effet, pression de contact et traction sont deux composantes de contrainte, qui collaborent via le critère de plasticité pour assurer la déformation plastique: une augmentation de l'un des efforts de traction s'accompagne d'une diminution de la pression des cylindres. Une des conséquences est la diminution des efforts de frottement. Cela explique l'intérêt de laminier sous traction pour minimiser les efforts de laminage, ce qui permet de :

- diminuer les pertes d'énergie dues aux efforts de frottement (cf. 1.3.2) ;
- minimiser les déformations de la cage par l'effet du soulagement des efforts de serrage, ce qui permet de mieux profiter des avantages des cylindres de travail à faible diamètre (cf. 1.3.2).



**Figure 1-22. Représentation de la ligne neutre dans l'emprise, ainsi que les contributions de la pression de contact et des efforts de laminage à la déformation plastique du matériau dans l'emprise.**

#### Remarque 5 :

1- La traction à chaque intercage aide aussi à transmettre une puissance disponible d'une cage vers une autre.

2- La traction efface les défauts géométriques de la bande (ondulations, frissettes, etc...) engendrés par le flambage (cf. § 1.2.2), ce qui permet de régulariser le débit de la matière entre deux cages successives. Cela permet également de maintenir la bande tendue afin de :

- Présenter à l'entrée d'une cage une bande plate qui ne plisse pas, surtout dans les cas de fortes réductions.
- Maintenir la bande le plus plat possible à la sortie des cylindres pour des mesures correctes de l'épaisseur.

## CH.2 Etudes bibliographiques et position du problème

### 2.1 Principaux phénomènes physiques mis en jeu pour les problèmes de planéité en laminage

La déformation des cylindres en laminage (aplatissement, flexion, bombé thermique) induit une hétérogénéité de l'élongation en sortie d'emprise dans le sens de la largeur de la bande. Cette hétérogénéité engendre l'apparition de contraintes résiduelles pouvant dépasser un niveau critique pour entraîner le flambage. Dans le contexte de laminage, ce flambage est aussi désigné sous le nom de défaut de planéité (cf. figure 2-1). Ces défauts apparaissent alors sous forme d'ondulations de topologie et d'orientation diverses et parfois complexes. Par ailleurs, le flambage conduit à la réorganisation du champ de contraintes dans la tôle laminée et peut influencer l'emprise. Par conséquent, le problème mécanique du laminage inclut un couplage de plusieurs phénomènes :

- la déformation élastique des cylindres de travail ;
- la déformation élasto-(visco)plastique de la bande dans l'emprise ;
- le flambage hors emprise.

La température lors du laminage peut intervenir par :

- l'expansion thermo-élastique des cylindres de la cage, qui modifie leur géométrie (bombé thermique) (cf. § 1.3.4) ;
- l'apparition des contraintes d'origine thermique qui sont parfois non négligeables ;
- la dilatation de la bande et son adoucissement thermique suite à une élévation de la température.

La dilatation est un phénomène secondaire en laminage à froid ; quant à l'adoucissement, il est surtout présent en laminage à chaud, ou alors dans des cas particuliers (aluminium, acier inoxydable, etc.) pour des raisons métallurgiques diverses.

La figure 2-2 donne une illustration des différents types de couplage qui doivent être pris en compte pour une modélisation complète du laminage. C'est en se basant sur cette analyse préliminaire que nous allons axer notre étude bibliographique.



### Remarque 6 :

Les températures atteintes en laminage à froid sont dans la gamme 100 - 150°C, ce qui n'est pas négligeable. En fait, ce qui engendre les contraintes d'origine thermique, c'est l'hétérogénéité de la température. Supposant celle-ci relativement faible, nous ne ferons que des analyses isothermes dans ce document. Bien évidemment, il serait utile de tester ultérieurement l'impact de cette simplification, sachant que dans l'état actuel, le logiciel qu'on développe le permet a priori.

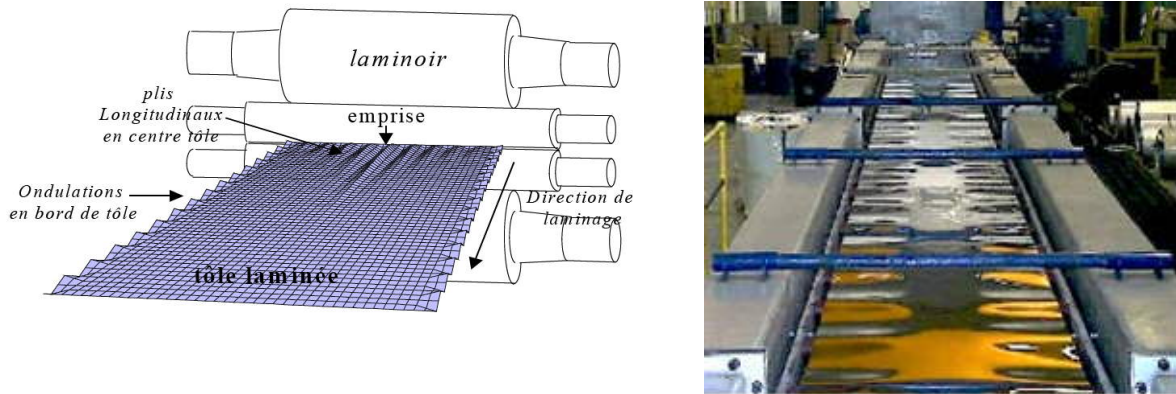


Figure 2-1. Défauts de planéité en laminage.

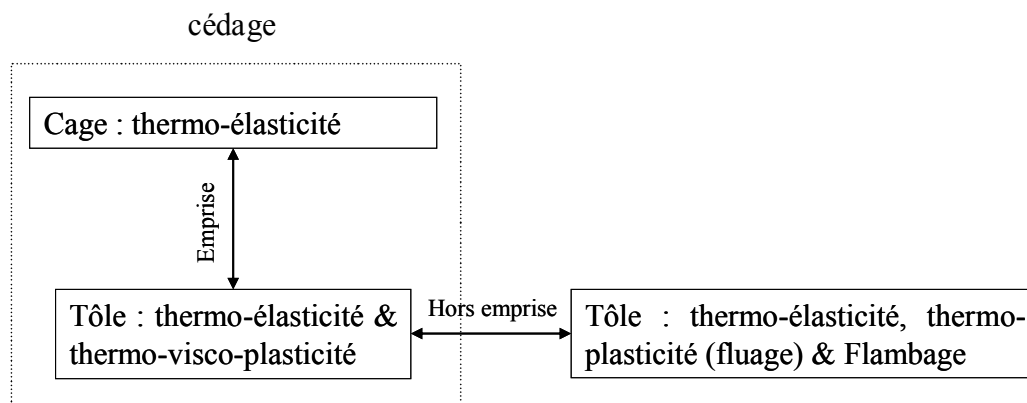


Figure 2-2. Les différents phénomènes à coupler afin de modéliser le laminage.

## 2.2 Axes de l'étude bibliographique

La bibliographie du laminage est considérable et très diversifiée ; elle couvre les différents aspects de ce procédé (mécaniques, chimiques, métallurgiques, tribologiques, productiques...). Ces domaines assez variés interviennent, de manière directe ou indirecte, dans la qualité des tôles laminées, en particulier dans la planéité. Or, compte tenu de notre objectif, nous avons plutôt orienté cette étude bibliographique sur la planéité en laminage et les phénomènes mécaniques qui lui sont directement liés, comme expliqué dans le paragraphe précédent. Citons en particulier :

- la déformation élastique de la cage et la déformation élastique-viscoplastique de la tôle (cédage),
- le flambage sous contraintes résiduelles.

Nous nous sommes aussi limités particulièrement au laminage à froid, étant donné que c'est à ce stade qu'on lamine des tôles très fines qui sont les plus susceptibles de flamber. De plus, nous négligeons les effets thermiques en laminage à froid, qui sont dus au frottement et à la déformation plastique dans l'emprise. Ainsi, la présente étude bibliographique ne met pas l'accent sur les

aspects thermiques en laminage, sachant qu'un couplage thermique a été précédemment introduit dans Lam3/Tec3 par Haquin et al. [2, 3, 4].

## 2.3 Analyse bibliographique sur la modélisation du laminage

### 2.3.1 Classification des modèles de laminage

Développer un modèle complet de laminage qui prend en compte tous les couplages détaillés dans la figure 2-2 est une tâche difficile et complexe. Ainsi, cette modélisation présente un défi qui reste difficile à relever, ce qui fait qu'aucun modèle complet n'a été réalisé à ce jour. En revanche, certains modèles de la littérature, conçus sur des bases plus ou moins simplificatrices, sont capables de reproduire quelques phénomènes rencontrés au cours du laminage (déformations de la cage et de la bande, phénomènes thermiques, répartitions des contraintes résiduelles hors emprise, flambage etc.). Mais ces modèles diffèrent par leurs complexité, précision, domaine de validité, et par les fondements physiques pris en compte. Or, les modèles les plus précis sont souvent les plus complexes et les plus coûteux. Les besoins de l'industrie permettent de dégager trois types de modèles :

- Les modèles « on-line » doivent répondre en temps réel aux besoins des préréglages et régulations des laminoirs. Ils ne peuvent être fondés que sur des formules très simples comportant quelques coefficients ajustés soit par référence à une base de données de cas, soit par régression de résultats de modèles plus complexes.
- Les modèles « off-line », plus élaborés, que leur temps de réponse plus long ne permet pas d'utiliser comme les modèles « on-line ». On peut ici distinguer :
  - des modèles complets, généralement sur la base de la Méthode des Eléments Finis, qui servent de modèles de référence pour la compréhension fine des phénomènes.
  - Des modèles plus simples utilisant souvent, pour le laminage des tôles minces, la méthode des tranches (cf. § 2.3.2.i). Validés par comparaison avec les précédents, ils servent à des études sous forme de campagnes de calcul, utiles pour concevoir des cages de laminoir, des gammes de laminage, des dispositifs annexes divers.

L'analyse bibliographique du paragraphe n'aborde que les modèles off-line, en commençant par les modèles simples.

### 2.3.2 État de l'art sur la modélisation du laminage

Ce thème forme le soubassement du modèle dont nous partons, pour lequel nous renvoyons à la référence [4]. Nous avons considéré que les modèles de déformation de cage qui y sont intégrés sont suffisants et que la priorité est de développer des méthodes permettant d'enrichir le calcul de bande, pour en déduire de façon fiable les défauts de planéité. C'est pourquoi nous réduisons l'analyse de la bibliographie de ce thème à un rapide survol historique, en insistant sur la prise en compte de l'hétérogénéité dans le sens transverse dans l'emprise.

#### 2.3.2.i Modèles de calcul de bande

Les modèles les plus anciens de calcul de la déformation de bande ont été depuis longtemps fondés sur la méthode des tranches en 2D [23,24]. Généralement, dans ce formalisme assez simple, la zone sous l'emprise est considérée totalement plastifiée, le matériau est supposé rigide - plastique et la résolution du problème se restreint à l'intégration de l'amont vers l'aval de l'équation de von Karman (équation d'équilibre horizontal dans laquelle on a tenu compte du critère de plasticité). Les modèles ultérieurs sont relativement plus généraux ; lorsqu'une bande rentre avec un bombé, les champs de contrainte vont dépendre de la coordonnée transverse  $y$ , ce qui conditionne la déformation des cylindres : les auteurs optent pour des approches pseudo-3D,

fondées sur la juxtaposition dans le sens travers de calculs 2D longitudinaux par la méthode des tranches [11,25]. Le modèle plastique, fondamentalement 2D, néglige tout écoulement transverse, ce qui est valide pour le centre de la bande. Mais la déformation plastique de la bande présente un caractère 3D en particulier au voisinage des rives (élargissement, relaxation des contraintes). Pour les prendre en compte, Wiklund et al. [25] diminuent la contrainte d'écoulement de 15% en rive, sur une zone de largeur supposée égale à l'épaisseur de la tôle.

Tozawa [26] préfère inclure une déformation transverse  $\varepsilon_{yy}$ , qu'il suppose proportionnelle à  $\varepsilon_{xx}$ . Or, afin de respecter l'équilibre des contraintes dans l'emprise par rapport aux tractions amont et aval de laminage (cf. figure 1-22), l'hétérogénéité transverse de la déformation de la bande est compensée par une déformation élastique longitudinale en entrée et en sortie de l'emprise. C'est une des premières analyses de la complexité du champ de contrainte au voisinage immédiat de l'emprise, bien démontrée par les analyses par éléments finis. Matsumoto [27,28] adopte une démarche similaire, mais enrichit cette dernière par l'intégration de l'équation d'équilibre dans la direction transverse. Ceci revient à introduire la moyenne suivant  $x$ , à une position donnée en  $y$ , de la composante de la déformation plastique transversale  $\varepsilon_{yy}$  dans l'emprise. Cette dernière s'exprime en considérant l'incompressibilité de la déformation plastique, pour un problème de déformation plane, comme suit :

$$\varepsilon_{yy}^{moy}(y) = \frac{2}{9} \frac{r_h}{1 - \frac{2}{3}r_h} \frac{l^2}{\frac{2\bar{\sigma}_0}{\sqrt{3}}} \frac{d^2\sigma_{yy}^{moy}}{dy^2} \quad (2.1)$$

$$r_h = \frac{h_e - h_s}{h_e}$$

$h_e$  : épaisseur à l'entrée de l'emprise ;  $h_s$  : épaisseur en sortie de l'emprise.

Le différentiel d'allongement est ensuite déterminé par (2.2) dans laquelle  $\varepsilon_{yy}^{moy}$  intervient.

$$\Delta\varepsilon_{yy}^{moy}(y) = -(1-\nu)\Delta\varepsilon_{xx}(y) - \Delta\varepsilon_{zz}(y) \quad (2.2)$$

où  $\Delta$  signifie le différentiel des variables suivant la largeur des cylindres (valeur locale en  $y$  - valeur moyenne).

La compensation élastique permet d'observer l'influence des tractions amont et aval de laminage sur l'emprise. En revanche, dans [26-28] les auteurs supposent la bande rigide hors emprise, ce qui paraît incorrect au vu des modèles plus récents [2, 3, 4]. En réalité le retour élastique redistribue les champs de contraintes, ainsi que de vitesse, surtout au voisinage de l'emprise. Ces auteurs supposent aussi que la longueur de contact est invariable suivant la largeur, autre hypothèse non confirmée, qui revient à dire que l'hétérogénéité du profil de contrainte à l'entrée et à la sortie de l'emprise reste identique.

Pour caractériser le problème de cédage en prenant en compte plus rigoureusement l'élargissement de la bande lors de son écrasement sous l'emprise, Dixon et al. [29] ont développé un modèle dans lequel ils utilisent une méthode asymptotique. Elle consiste à développer l'épaisseur – donc la réduction – et le champ de déplacement longitudinal en série entière.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_0(x) + au_1(x, y) + \dots \\ h(x, y) &= h_0(x) + ah_1(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

$u$  : déplacement longitudinal ;

$h$  : épaisseur de la tôle.

Après avoir injecté ces variables dans les équations d'équilibre et la loi de comportement, les auteurs négligent les termes d'ordre supérieur ou égal à 1. Ainsi, la résolution du problème devient assez simple, et aboutit à une expression analytique de la solution du problème, en particulier l'expression de la déformation latérale due à l'élargissement. Cette expression analytique fournit assez rapidement des résultats pour des conditions de laminage données. Mais elle fait apparaître un terme qui lie l'élargissement à la composante latérale de la contrainte de frottement, qui ne peut être identifiée qu'à partir de données expérimentales, et encore difficilement [30,31].

Les modèles de calcul de bande qu'on vient de décrire se limitent à l'emprise, en considérant que cette dernière est totalement plastifiée lors du laminage. Ceci n'est pas tout à fait exact, étant donné l'existence dans l'emprise de zones élastiques en contact, qui peuvent prendre une importance notable dans certains cas (double réduction, skin pass...). De plus, la prédiction des défauts de planéité se limite à l'observation des profils des contraintes en sortie de l'emprise, en particulier de la contrainte longitudinale. Par exemple, ils prévoient un centre long si cette contrainte est compressive au centre de la bande et des bords longs si elle est compressive en rives. Pour lever ces limites, et pour prendre en compte de façon plus naturelle et fiable le caractère 3D des écoulements, la méthode des éléments finis (MEF) paraît plus appropriée. Plus généralement, elle offre une opportunité d'analyser de manière globale et consistante le procédé de laminage.

L'utilisation de la méthode des éléments finis dans le calcul de bande en laminage date des années 1970, d'abord en 2D [32]. L'avantage essentiel de la méthode, par rapport à celles qui ont été décrites précédemment, est sa capacité à traiter exactement des problèmes 3D. C'est donc très rapidement vers le 3D que les modèles éléments finis se sont dirigés. Par ailleurs, les modèles itératifs stationnaires utilisant une topologie de maillage structuré de la bande paraissent les mieux adaptés au laminage, offrant une certaine rapidité jointe à une bonne précision. Le maillage structuré utilisé par ce type de modèles est constitué d'éléments hexaédriques tridimensionnels à huit nœuds ; il est construit par alignement dans la direction de laminage d'une série de sections transversales bidimensionnelles, de topologies identiques et composées de mailles à quatre nœuds (cf. figure 2-3). Ainsi, les nœuds du maillage forment des lignes de courant suivant lesquelles les variables d'état peuvent être intégrées dans le cadre d'une formulation quasi-eulérienne (méthode d'intégration des lignes de courant), qui élimine toute discrétisation temporelle. Comme la forme initiale du domaine quasi-eulérien diffère de la forme réelle, ne serait-ce que du fait de l'élargissement, une correction itérative est nécessaire. Partant de la détermination de la composante transverse du champ de vitesse, on réactualise les positions  $x$  des nœuds d'une itération à une autre et de proche en proche par intégration de l'équation (2.4) le long d'une même rangée longitudinale de nœuds :

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \quad (2.4)$$

$$\vec{V} = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} + V_z \vec{z}$$

où  $\vec{V}$  est le champ de vitesse calculé par éléments finis à l'itération précédente.

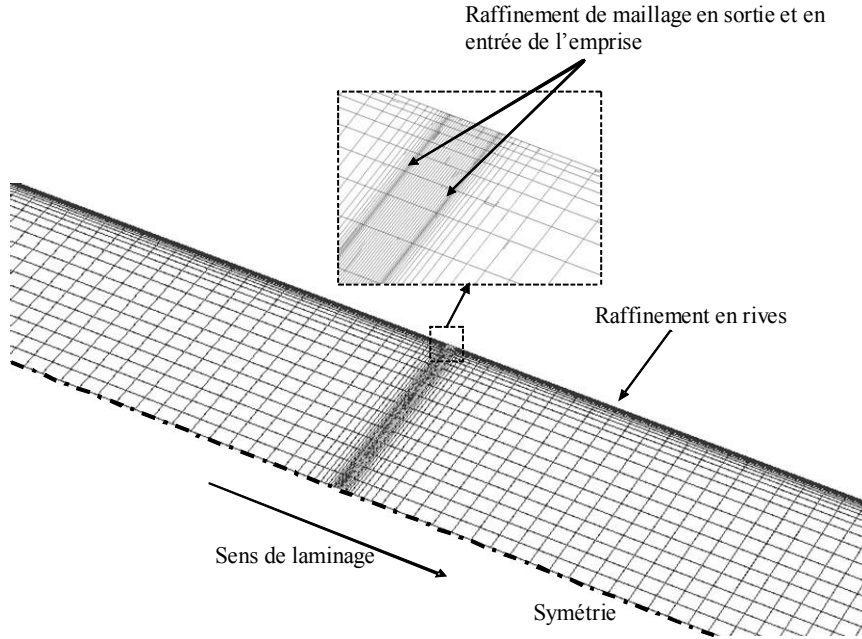


Figure 2-3. Maillage structuré d'une tôle utilisé par le modèle de laminage Lam3/Tec3.

### 2.3.2.ii Modèles de cé dage des cylindres

Comme pour les modèles de bande, les premiers modèles de cage ont été basés sur des relations analytiques plus ou moins simples. Dans ce cas, la description de l'aplatissement des cylindres est celle proposée par Hitchcock [33]. Celui-ci suppose que la circonférence de la section longitudinale du cylindre de travail, dans et au voisinage de la zone de contact avec la bande, reste circulaire (cf. figure 2-4). Le rayon déformé  $R'$  est approché par la relation suivante :

$$R' = R \left( 1 + 16 \frac{1-\nu^2}{\pi \times E} \frac{F^{lam}}{h_e - h_s} \right) \quad (2.5)$$

$F^{lam}$  est la force de laminage appliquée par unité de largeur (N/mm);

$R$  est le rayon initial du cylindre de travail (mm);

$E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du cylindre de travail.

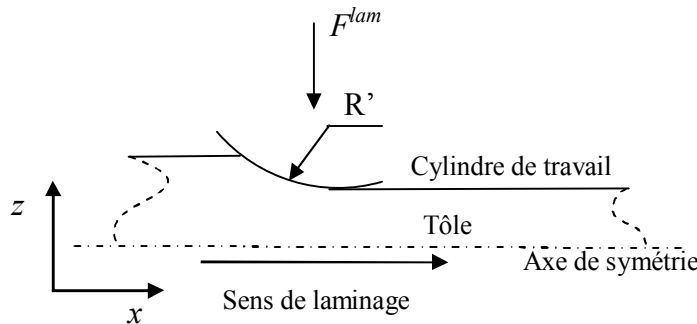


Figure 2-4. Approche analytique simplifiée de la déformation du cylindre de travail lors du laminage.

Dans un tel modèle analytique 2D, comme l'effort de laminage  $F^{lam}$  dépend du rayon  $R'$  et  $R'$  dépend de  $F^{lam}$ , il faut, pour calculer  $F^{lam}$  et  $R'$ , un couplage itératif d'un calcul de la géométrie des cylindres de travail (calcul de  $R'$ ) et d'une résolution de l'équation différentielle de von Karman (« méthode des tranches ») dans la bande [23,24].

L'insuffisance de la formule de Hitchcock est rapidement apparue : le profil des cylindres déformés est en réalité loin d'être circulaire. Une autre méthode de calcul de la déformation des cylindres, basée sur la méthode des fonctions d'influence 2D, a été proposée pour la première fois par Jortner [34]. Les fonctions d'influence sont définies comme une réponse en déplacement en un point quelconque d'un disque soumis à un effort ponctuel radial sur sa périphérie. Cela signifie qu'il existe une solution analytique, décrivant la déformation élastique du disque engendrée par cet effort ponctuel qui lui est appliqué. Sur une longueur de contact, le disque est soumis à une répartition de contraintes normales. Le champ de déplacement total est obtenu par superposition des solutions obtenues pour chacune des contraintes normales appliquée sur la zone de contact. Cela repose sur la linéarité du problème supposé purement élastique. De nombreux modèles de laminage ont dès lors utilisé cette technique.

Un autre point d'évolution marquant est l'extension au 3D. Les approches modernes partent d'un modèle analytique de flexion d'une poutre sous chargement homogène, décrite en 3D [35]. Il montre que l'on a le droit de décomposer le champ de déplacement en composantes de flexion, d'aplatissement, d'effet Poisson... et que chacune de ces composantes peut être généralisée à des chargements plus complexes. De ce fait, Counhaye [5] et Hacquin et al. [4] utilisent des modèles de déformation élastique tridimensionnelle des cylindres comme superposition de théorie des poutres pour la flexion, de modèle de Boussinesq pour l'aplatissement et de théorie de Hertz pour le contact cylindre de travail / cylindre d'appui. Le tout est discrétisé par une méthode de fonctions d'influence, ce qui, une fois ajoutées les conditions aux limites, fournit un modèle matriciel bien posé [4]. Il donne les profils du cylindre en contact dans un certain nombre de sections longitudinales, qui ont servi de base au couplage avec des calculs 2D par la méthode des tranches (cf. 2.3.2.i).

Notons que la méthode des éléments finis a aussi été utilisée pour décrire correctement la déformation des cylindres, d'abord en 2D [36]. Elle permet d'étendre l'analyse des cylindres aux contraintes et aux températures, mais pour le profil de contact, nécessaire pour le couplage cage-bande, le gain n'est pas évident. Un peu plus tard a été utilisée – rarement – la méthode des éléments frontières, supposée plus rapide [37]. Des modèles éléments finis élastiques 3D ont été proposés plus récemment [38,39] ; la comparaison faite par [40] montre que le modèle semi-analytique proposé par Hacquin et al. [4], bien corrigé des effets de bord, est au moins aussi précis, et à un bien moindre coût, que ses concurrents, y compris les modèles EF.

La synthèse des paragraphes 2.3.2.i et 2.3.2.ii montre que les modèles de laminage les plus pertinents actuellement sont fondés sur la MEF, au moins pour le calcul de la bande dans le cas où des modèles de cages semi-analytiques rapides et précis sont utilisés [4,40]. De ce fait, l'utilisation de la MEF pour le laminage mérite d'être analysée plus en détails (cf. § ci-dessous).

### **2.3.2.iii La méthode des éléments finis pour la modélisation du laminage**

Là encore, il ne saurait être question d'analyser toute la littérature sur l'application des éléments finis au laminage, mais seulement de donner un aperçu diachronique des grandes évolutions.

Au début des années 1980, la limitation des moyens de calcul a fait que ce sont des formulations stationnaires qui ont été développées les premières [41,32]. Par la suite, le développement des grands logiciels éléments finis, par nature écrits dans un formalisme instationnaire, incrémental, a conduit à diversifier les approches. Dès lors, on disposait d'approches stationnaires (« flow formulation »), avec une démarche quasi-eulérienne, et de modèles incrémentaux, essentiellement lagrangiens. Mais très rapidement sont apparus les modèles Arbitrairement Lagran-

giens / Eulériens (ALE) [42], qui cherchaient à regrouper les avantages des deux autres formulations en contournant leurs défauts.

**a) Modèles EF stationnaires et instationnaires, quasi-eulériens et lagrangiens**

La phase d'engagement de la bande dans le laminoir possède un caractère instationnaire, transitoire. De plus, le flambage, s'il se manifeste, est par nature instationnaire. Ainsi, un modèle EF construit à l'aide d'une formulation instationnaire est certainement plus général. En revanche, ce type de formulation est généralement coûteux en temps de calcul et parfois inefficace pour les cas de laminage des tôles très fines [43], parce que la gestion des contacts évolutifs (arrivées et départs) provoque des instabilités. Dès lors, une formulation stationnaire peut être plus adéquate, à condition de renoncer à modéliser les phénomènes à caractère instationnaire. Le régime permanent représente souvent une fraction très dominante du procédé en laminage, à l'exception notable de la thermique des cylindres ; c'est ce qui rend l'approche stationnaire attractive.

La modélisation instationnaire se fait généralement à l'aide des logiciels commerciaux, fondés sur une formulation lagrangienne réactualisée (Abaqus<sup>®</sup> [44,45], Forge<sup>®</sup> [43], Marc<sup>®</sup> [46]). Il a fallu longtemps pour que ces logiciels deviennent suffisamment généraux pour traiter toutes les spécificités du laminage (cinématique, actionneurs). Dans l'intervalle, des modèles stationnaires ont été développés, pour la plupart fondés sur des approches itératives quasi-eulériennes (avec des mouvements de maillage autorisés de manière très restrictive), d'autres exceptionnellement en eulérien pur (maillage parfaitement fixe englobant l'ensemble du système à modéliser [47]). Du fait de leur efficacité en temps de calcul, et du fait que les aspects « métier » ont pu y être développés depuis longtemps, ils représentent encore aujourd'hui une majorité des applications.

**b) Modèles EF utilisant la formulation ALE**

Du fait que le procédé de laminage possède simultanément des aspects stationnaires et instationnaires, la synthèse des avantages et des limitations des deux formulations lagrangienne et eulérienne conduit à une formulation ALE (Arbitraire Lagrangien Eulérien) [43,2]. Dans cette formulation, le mouvement du maillage est découplé de celui de la matière. D'un point de vue technique, les déplacements des nœuds du maillage peuvent être alors imposés nuls dans la direction du laminage, suivant laquelle le maillage est supposé eulérien, tout en suivant le mouvement de la matière dans les deux directions transverses. La formulation ALE permet ainsi d'adapter le maillage à chaque incrément de calcul afin de :

- conserver une meilleure qualité de maillage et décrire de manière optimale les frontières du domaine ;
- conserver le raffinement du maillage dans les zones critiques, présentant de fortes variations spatiales des variables d'état (contraintes, vitesse, déformation) ;
- minimiser la déformation du maillage, ce qui empêche la dégénérescence des éléments qui conduit souvent à des problèmes de convergence.

Ainsi, les deux principaux apports avantageux de l'ALE sont :

- une bonne gestion du contact ;
- une taille optimale du problème ;
- un gain considérable en temps de calcul, étant donné que le maillage est adapté en conservant un nombre constant de degrés de liberté durant le calcul.

Bien que la formulation ALE, implantée dans Forge<sup>®</sup>, ait été adoptée dans [43,48], aucune application au laminage en présence de flambage n'a été effectuée. Ceci n'est pas une limitation de la formulation ALE en elle-même, mais c'est dû au maillage isotrope non structuré utilisé, composé d'éléments tétraédriques. En effet, étant donné que les éléments tétraédriques ne per-

mettent pas une grande disproportion spatiale, la taille des éléments est choisie principalement en fonction de l'épaisseur de la tôle : elle est au plus égale à l'épaisseur de la tôle. Ce caractère d'un maillage isotrope, exige alors un nombre de degrés de liberté assez élevé quand le rapport épaisseur/largeur est très faible, ce qui alourdit considérablement le calcul. Il faut en effet se rendre compte que pour modéliser le laminage d'une tôle fine, on doit intégrer des échelles spatiales très différentes :

- le dixième de millimètre dans l'épaisseur,
- le millimètre ou le centimètre pour la longueur de contact,
- le mètre pour la largeur (modèles 3D), pour le diamètre des cylindres,
- et jusqu'à la dizaine de mètres pour la longueur, dans la mesure où les champs de contraintes évoluent avant et après l'emprise sur de longues distances.

### c) Synthèse

- Le maillage structuré de la tôle dans les modèles quasi-eulériens [2, 3, 4, 49-53] est le plus adapté pour modéliser le laminage. Sur un exemple de maillage du modèle développé par Hacquin et al. [2] (baptisé Lam3/Tec3 : § 3.1), on observe la capacité de le raffiner d'une part localement, et d'autre part davantage dans une direction que dans une autre (cf. figure 2-3). C'est essentiel pour traiter les différentes échelles spatiales mentionnées plus haut.
- La formulation quasi-eulérienne utilisant un modèle EF pour le calcul de bande (cf. § 2.3.2.i) et la méthode des fonctions d'influence [2, 3, 4, 49-53] pour le calcul de la déformation de la cage, sont les caractéristiques optimales pour un couplage itératif cage - bande rapide et précis.
- Néanmoins, l'approche quasi-eulérienne n'est pas capable de prendre en compte les phénomènes à caractère instationnaire, tels que le flambage.

## 2.4 Modélisation directe des défauts de planéité manifestes

Une modélisation du procédé du laminage est confrontée à plusieurs types de verrous scientifiques, parmi lesquels on trouve les différents types de couplage évoqués dans la figure 2-2. Par ailleurs, la déformation élastique de la cage est l'une des causes principales de la différence d'affinité entre le bombé tôle à l'entrée et à la sortie de l'emprise, origine du différentiel d'allongement des fibres matérielles qui engendre le flambage. Le flambage apparaissant comme une conséquence de ce qui se passe dans l'emprise, dans la logique d'une modélisation du laminage, le flambage se place dans une position de dépendance par rapport au couplage cage-bande (ou cédage). Très longtemps, on s'est contenté de calculer le différentiel local de réduction, donc d'allongement, donné par des modèles de cédage (sans prise en compte du flambement) et de l'exprimer en « Unités I » ou UI [11-19]. C'est l'expérience qui est mise à profit pour savoir si à un nombre donné d'UI correspond un défaut de planéité manifeste, ou juger de la gravité d'un défaut latent. Mais un calcul précis des défauts de planéité manifestes en laminage nécessite en fait un modèle 3D permettant une description de la bande dans l'emprise et hors emprise. Cela signifie que ce sont les modèles utilisant la méthode des éléments finis, en particulier pour le calcul de bande, qui sont les plus adéquats.

Par rapport au flambage (défauts de planéité manifestes), un modèle EF utilisant un maillage structuré et une formulation quasi-eulérienne [54] paraît limité pour plusieurs raisons :

- à cause du caractère instationnaire du flambage.



- du fait que les éléments hexaédriques linéaires sont inadaptés pour décrire le flambage : ils présentent une rigidité excessive à la flexion, surtout lorsque des considérations de coût de calcul conduisent à mettre peu de couches de mailles dans l'épaisseur.

Par contre, les modèles utilisant une formulation lagrangienne ou ALE sont a priori capables de décrire certains types de flambage, comme le montre l'exemple de la figure 2-5. Mais l'instabilité de flambement peut être un phénomène de forte singularité, qui nécessite une diminution considérable du pas de temps à l'origine d'une augmentation importante du temps de calcul, et parfois de problèmes de convergence [54]. D'autre part, un maillage constitué d'éléments tétraédriques n'est pas toujours le plus convenable pour un problème de flambage.

Les limitations des modèles EF 3D vis-à-vis de la caractérisation des défauts de planéité manifestes, incitent certains auteurs [54,56-60] à utiliser des modèles de coques qui ont une grande capacité pour bien décrire le flambage des plaques. Or, il n'existe pas à ce jour une formulation de coque qui ait prouvé sa capacité à rendre compte de l'écrasement de la pièce sous l'emprise ; à cet égard, seule une formulation 3D semble convenable. Cela rend assez difficile la tâche de concevoir un modèle capable de bien décrire simultanément l'écrasement de la tôle sous l'emprise et le flambage hors emprise. C'est pour cette raison que certains auteurs [54,56-60] tentent de traiter le flambage de la tôle en deux étapes successives, c'est-à-dire par chaînage de deux modèles distincts :

- un calcul de laminage en 3D sans flambage,
- un calcul de flambage de coques utilisant le champ de contrainte en aval de l'emprise issu du premier modèle.

La première étape peut utiliser les modèles de cédage simplifiés décrits au § 2.3.2, où seule la partie sous emprise est considérée. On ne dispose dans ce cas que des profils transverses de la contrainte obtenus aux extrémités amont et aval de l'emprise. Ceux-ci sont alors propagés uniformément le long de la tôle dans le modèle de coques. Si on commence par un calcul EF 3D, on a alors un champ complet des six composantes de contraintes, dans les trois directions spatiales. Pourtant, même dans ce cas, tous les auteurs transfèrent seulement la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$ , supposant de plus que son profil transverse est uniforme le long de la tôle, dans le sens du laminage [54-60]. Approximation supplémentaire, ils remplacent ces distributions par des profils transverses relativement simples ou analytiques. Nous verrons à la fin de ce mémoire les limites de telles simplifications.

Notons que la méthode de chaînage est basée sur l'absence du couplage emprise - flambage. Counhaye [5] est le seul à avoir introduit un traitement de flambage dans l'algorithme de son modèle de laminage, de manière à prendre en compte le couplage emprise - flambage (cf. figure 2-2). Néanmoins, le modèle de flambage adopté est très simplifié (cf. § 2.6).

Dans ce qui suit, on introduit l'approche découplée par chaînage, en citant avant tout les modèles de flambage de coques sous contraintes résiduelles mis à profit, et l'approche couplée de Counhaye [5] basée sur un modèle simple de flambage.

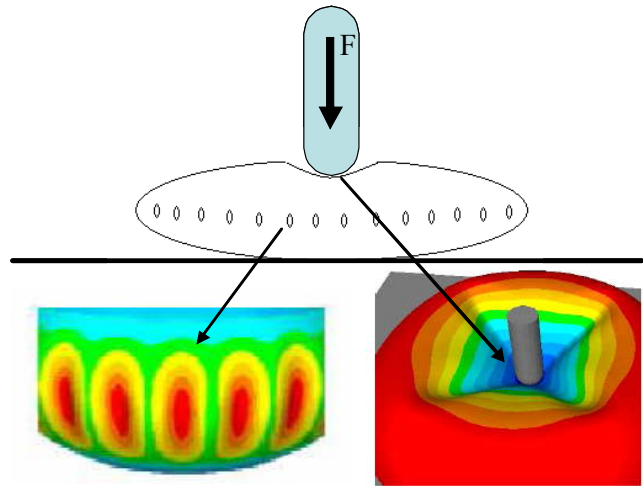


Figure 2-5. Calcul à l'aide de Forge3® du plissement d'une membrane d'un coussin d'air gonflable écrasé par un pion [55].

## 2.5 Approche découplée (chaînage) pour la modélisation des défauts de planéité manifestes

### 2.5.1 Modèles de flambage de coques sous contraintes résiduelles pour modéliser les défauts de planéité manifestes en laminage

#### 2.5.1.i Modèles semi-analytiques

Le calcul du flambage sous contraintes résiduelles d'une plaque revient à trouver la solution non triviale de l'équation différentielle (2.6).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{N_x}{\mathbb{D}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

Ici,  $w$  est le déplacement hors plan d'un point de la plaque.  $N_x = -h \cdot \sigma_{xx}(y)$ , où  $h$  désigne l'épaisseur de la tôle, et  $\sigma_{xx}(y)$  est la contrainte longitudinale qui varie suivant la largeur de la tôle,  $|y| \leq b$ . Enfin,  $\mathbb{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Afin de résoudre le problème de flambage partant de cette équation, Bush et al. [59] introduisent un paramètre de chargement  $\lambda$  et la distribution de chargement adimensionnel  $K(y) = \frac{N_x(y)b^2}{\pi^2 \mathbb{D}}$ ; (2.6) devient :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\lambda \frac{K(y)\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

Timoshenko et al. [61] proposent une solution de l'équation (2.7) de la forme suivante

$$w(x, y) = f(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.8)$$

où  $l$  est la longueur de la plaque et  $f$  la flèche suivant la largeur. En injectant (2.8) dans (2.7), les termes suivant la direction  $x$  s'éliminent et on obtient :

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \left[ \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - \lambda K(y) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \right] f = 0 \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) peut être facilement résolue analytiquement pour une distribution  $K(y)$  uniforme, ce qui se ramène à  $\sigma_{xx}$  homogène dans la plaque. De ce fait, pour une contrainte résiduelle variable dans la largeur, Bush et al. discrétisent le profil transverse de celle-ci en contraintes longitudinales homogènes par sous-domaines, en forme de « bandelettes » (cf. figure 2-6). La relation (2.9) peut être ainsi facilement résolue par sous-domaines  $i$  ( $i=1..m$ ) de largeur  $\Delta y$  chacun, dans lesquels la solution élémentaire obtenue correspond à la solution analytique donnée par (2.10). Chaque solution élémentaire admet quatre constantes d'intégration inconnues (équation différentielle de degré quatre) qui sont à identifier.

$$f_i(y) = \sum_{j=1}^4 C_{ij} e^{\tau_j} \quad (2.10)$$

avec :

$$\tau_1 = \left( -\frac{\pi y_i \sqrt{bn(bn - l\sqrt{\lambda K_i})}}{bl} \right), \tau_3 = \left( \frac{\pi y_i \sqrt{bn(bn - l\sqrt{\lambda K_i})}}{bl} \right),$$

$$\tau_2 = \left( -\frac{\pi y_i \sqrt{bn(l\sqrt{\lambda K_i} + bn)}}{bl} \right), \tau_4 = \left( \frac{\pi y_i \sqrt{bn(bn + l\sqrt{\lambda K_i})}}{bl} \right).$$

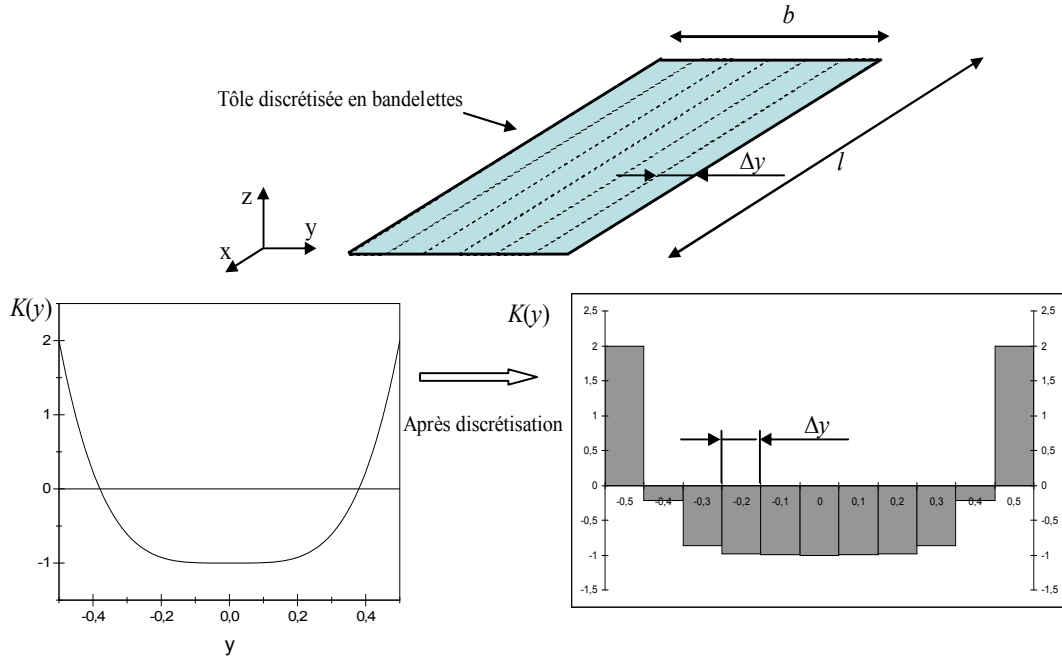


Figure 2-6. Discretisation du profil de la contrainte résiduelle  $\sigma_{xx}$ .

L'identification des constantes d'intégration  $C_{ij}$  est réalisée suite à l'assemblage des solutions élémentaires pour aboutir à la solution globale du problème, en se basant sur la continuité de la solution. Cette condition de continuité permet d'éliminer  $4(2m-1)$  inconnues. Les quatre inconnues restantes sont déterminées à partir des conditions aux limites en déplacement du problème. On obtient alors un système linéaire pouvant s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^{8m} M_{ij} C_j = 0 \quad (2.11)$$

$(i = 1, 2, \dots, 8m)$

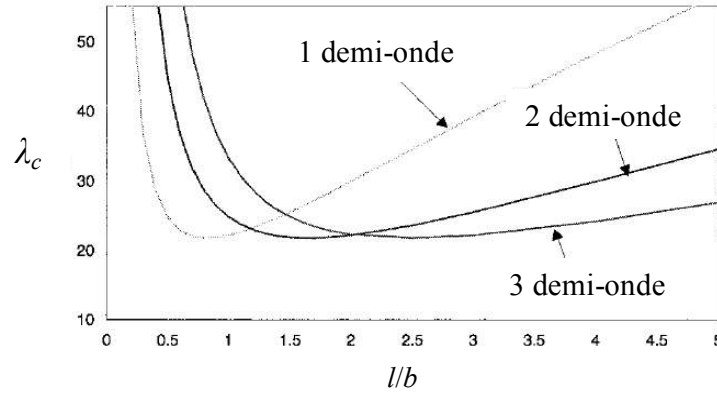
Ce système admet une solution non triviale si et seulement si le déterminant de la matrice  $[M]$ , fonction du multiplicateur  $\lambda$ , est nul. Ainsi, le problème se ramène à chercher la valeur critique  $\lambda_c$  de  $\lambda$  qui annule ce déterminant. Enfin, le mode de flambage (défini par  $n$  : le nombre d'ondes suivant  $x$ ) est celui qui donne une valeur minimale de  $\lambda$  pour une géométrie de plaque donnée (longueur/largeur). Par exemple, pour un profil de chargement décrit par (2.12) et pour un rapport longueur/largeur ( $l/b$ ) égal à 3, on identifie, d'après la figure 2-7, le mode de flambage qui correspond à  $n = 3$ .

$$K(y) = 22 \left( -1 + 2.4 \left( \frac{2y}{b} \right)^4 \right) \quad (2.12)$$

Dans le laminage, le chargement hors emprise de la tôle est composé de deux contributions : la traction de laminage et les contraintes résiduelles. Afin d'approcher les conditions de laminage dans un modèle de flambage de coques, ces deux contributions doivent être reproduites. Dans le modèle de Bush et al. [59], ces deux types de chargement se superposent pour donner le profil de contrainte  $\sigma_{xx}$  qui se décompose donc de la manière suivante :

$$\sigma_{xx}(y) = \bar{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{xx}(y) \quad (2.13)$$

- $\bar{\sigma}_{xx}$  est la moyenne non nulle de ce profil (résultante) qui représente la traction de laminage ;
- $\tilde{\sigma}_{xx}(y)$  est une distribution hétérogène d'un chargement en contrainte résiduelle à moyenne nulle. Ce chargement représente les contraintes résiduelles.



**Figure 2-7. Evolution du paramètre de chargement critique  $\lambda_c$  en fonction du rapport longueur/largeur ( $l/b$ ) de la tôle pour différents modes correspondant aux différentes valeurs de  $n$ .**

Si on revient sur l'équation (2.7), on remarque que le paramètre  $\lambda$  multiplie la totalité du chargement en contrainte qui comprend la résultante - la traction imposée. Par ailleurs, ce paramètre  $\lambda$  représente l'amplitude de contrainte ayant une distribution  $K(y)$ . Cette amplitude admet une valeur critique  $\lambda_c$  quand le flambage a lieu (charge critique). Cela semble incohérent puisque  $\lambda$  ne doit pas multiplier la résultante ( $\bar{\sigma}_{xx}$ ) qui représente la traction qui est une donnée fixe du problème à résoudre. Ainsi, ce modèle traite un problème de flambage mais les résultats obtenus ne sont pas représentatifs d'un problème de modélisation des défauts de planéité en laminage.

Dans le modèle de Fisher et al. [56,58] ce problème ne se pose pas et le mode ainsi trouvé correspond à la traction de laminage imposée. Pour une expression d'un chargement imposé (2.14), on reconnaît la distribution transverse de la contrainte résiduelle  $\sigma_{xx}$  ( $\sigma_{xx} = N_K K(y)$ ) et  $N_0$  qui représente la résultante en traction de laminage.

$$N_x(\rho) = N_K K(\rho) + N_0 \quad (2.14)$$

Avec :

$$\rho = \frac{y}{b}$$

$N_K$ : amplitude du chargement.

$N_0$  : résultante du chargement appliqué qui représente l'effort de traction appliqué.

Dans ce modèle, Fisher et al. [56,58] optent pour la minimisation de l'énergie de déformation élastique causée par le flambage, suivant des paramètres caractérisant la géométrie des défauts. Le potentiel de l'énergie de déformation élastique vaut :

$$\phi = \underbrace{\frac{\mathbb{D}}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \times \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] d\Omega}_{\phi_B} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (N_x + N_0) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\Omega}_{\phi_M} + \underbrace{\frac{N_0^2 l b}{2 E h}}_{\phi_{N_0}} \quad (2.15)$$

L'expression paramétrée de la forme de la flèche adoptée est donnée par (2.16).

$$w(x, \rho) = q |2\rho|^{\kappa} (\text{sign}(\rho))^{\varphi} \cos\left(\frac{\pi x}{\tilde{l}}\right) \quad (2.16)$$

$\tilde{l}$  est la longueur d'onde de la solution. Le mode est symétrique si  $\varphi$  est paire, antisymétrique sinon.  $\kappa$  est un paramètre (puissance en  $\rho$ ) qui décrit la forme du mode de flambage en largeur et  $q$  représente l'amplitude du défaut qui doit minimiser le potentiel, d'où :

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} \delta q = 0 \quad (2.17)$$

Ce qui donne :

$$\phi_M(w) + \phi_B(w) = 0 \quad (2.18)$$

(2.18) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{N} \frac{\partial \phi_M(w)}{\partial \tilde{N}} + \tilde{N}_0 \frac{\partial \phi_M(w)}{\partial \tilde{N}_0} + \phi_B(w) = 0 \\ \tilde{N} = \frac{N_K b^2}{D \pi^2}, \quad \tilde{N}_0 = \frac{N_0 b^2}{D \pi^2} \end{cases} \quad (2.19)$$

On déduit alors :

$$\tilde{N} = - \frac{\tilde{N}_0 \frac{\partial \phi_M(w)}{\partial \tilde{N}_0} + \phi_B(w)}{\frac{\partial \phi_M(w)}{\partial \tilde{N}}} \quad (2.20)$$

On injectant l'expression de la solution (2.16) dans (2.15), (2.20) devient :

$$\tilde{N} = - \frac{\tilde{N}_0 \frac{1}{2\kappa+1} + \frac{\left(\frac{b}{l}\right)^2}{2\kappa+1} - \frac{8\kappa(\kappa-1)}{\pi^2(2\kappa-1)} + \frac{16\left(\frac{l}{b}\right)^2 \kappa^2(\kappa-1)^2}{\pi^4(2\kappa-3)} + \frac{8(1-\nu)\kappa}{\pi^2}}{2 \int_0^{\frac{1}{2}} K(\rho) (2\rho)^{2\kappa} d\rho} \quad (2.21)$$

La longueur d'onde  $\tilde{l}$  et l'exposant  $\varphi$ , traduisant le mode de flambage, doivent minimiser (2.21) afin d'obtenir la plus petite valeur possible de  $\tilde{N}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \left(\frac{\tilde{l}}{b}\right)} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \kappa} &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Finalement, on parvient à un système à deux équations et à deux inconnues  $\frac{\tilde{l}}{b}(\tilde{N}_0)$  et  $\kappa(\tilde{N}_0)$ .

Dans ces modèles semi-analytiques, les modes en centre long ou en bords longs ne sont pas obtenus directement comme solutions des modèles décrits dans les références [56-59] : ils font l'objet d'une analyse a priori du profil de contrainte résiduelle. Suite à cette analyse, des conditions aux limites particulières sont imposées, différentes des conditions aux limites réelles de laminage, pour pouvoir aboutir au résultat souhaité. Ce dernier doit être compatible avec le profil de contrainte imposé. Par exemple, on a vu que pour le modèle de Bush et al. [59], il est indispensable d'introduire des conditions aux limites complémentaires permettant de calculer les constantes d'intégrations  $C_{ij}$ . Il en va de même pour le modèle de Fisher et al. [56,58], où, quelles que soient les valeurs de  $\kappa$  décrivant le mode de flambage, la solution obtenue donnera toujours un bord long (puisque  $w(x, 0) = 0$ ). Ces conditions sont choisies de sorte que, si les auteurs s'attendent à un centre long (contrainte en compression au centre), ils imposent des bords fixes comme condition aux limites et inversement.

Marchand [54] utilise lui aussi une méthode qui consiste à minimiser l'énergie de déformation élastique pour une distribution de contraintes résiduelles donnée. Ces champs de contraintes planes<sup>3</sup> sont récupérés d'un calcul effectué à l'aide de Lam3/Tec3 (cf § 3.1) sans flambage. Soit une expression paramétrée du champ de déplacement  $\xi$  exprimée par (2.23).

$$\begin{aligned} \xi &= u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} \\ u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y) &= q \sin(\omega_x x + \varphi_x) \sin(\omega_y y + \varphi_y) \end{aligned} \quad (2.23)$$

La méthode consiste donc à trouver les valeurs de  $q$ ,  $\omega_x$  et  $\omega_y$  qui minimisent l'énergie de déformation élastique. Les déphasages  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$ , quant à eux, sont donnés par les conditions aux li-

<sup>3</sup> Pour les problèmes de tôles fines, qui font souvent l'objet de nos travaux, les contraintes hors emprise sont considérées planes.

mites. Ainsi, on retrouve encore la nécessité de choisir des conditions aux limites adéquates, de manière à fournir des résultats prévus au préalable d'après l'analyse de la distribution des contraintes résiduelles. Par exemple, si le profil de la contrainte  $\sigma_{xx}$  est tel qu'il est représenté sur la figure 2-6, un défaut en centre long est estimé ( $w(x,0) = 0$ ), donc  $\varphi_x$  doit être choisie nulle.

### 2.5.1.ii Modèles de flambement par éléments finis coques

Ce type de modèle est certainement plus adapté pour les chargements complexes. Cependant, pour un problème donné, l'énergie peut présenter une multitude de minima, donc plusieurs solutions possibles correspondant aux différents modes (longueurs d'ondes  $\omega_x$  et  $\omega_y$ ). Ainsi, la recherche de la solution du problème qui donne un minimum absolu de l'énergie est délicate. De plus, dans les modèles de flambage de coques ci-dessus, le mode de flambage respecte une expression analytique choisie par l'utilisateur. Cela exclut un certain nombre de solutions possibles qui ne coïncident pas avec cette forme analytique imposée. Par conséquent, de tels modèles risquent de mal estimer le mode de flambement, si la forme analytique choisie n'est pas assez riche au regard de la complexité des modes possibles. Cette limitation ne se présente pas pour les modèles numériques, en particulier dans les modèles EF coques pour la modélisation du flambage. Toutefois, les modèles commerciaux, tel que Abaqus®, ne permettent pas d'injecter dans une plaque des chargements sous forme de contraintes résiduelles. Pour lever cette difficulté, certains auteurs comme Marchand [54] passent par l'intermédiaire d'un champ thermique, utilisant la thermo-élasticité pour injecter un champ de contraintes résiduelles. Ainsi, faire croître le chargement mécanique en contraintes, revient à faire croître la température ( $\sigma = \alpha_i \Delta\Theta$ ,  $\alpha_i$  : matrice des coefficients thermomécaniques,  $\Delta\Theta$  : élévation de la température  $\Theta$  dans la plaque). Cette méthode semble quand même limitée, puisqu'elle ne donne pas la possibilité d'une modélisation riche et générale de contraintes complexes comme on peut en rencontrer dans le problème de planéité en laminage. Ainsi, on se limite toujours à des profils relativement simples de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  supposée uniforme le long de la tôle.

D'autre part, aucun des modèles de flambage de coques que l'on vient de citer ne peut faire un calcul de post-flambage. Ils sont restreints au flambage linéaire, c'est-à-dire à la détection du mode et de la charge critique de flambage pour une distribution de contrainte résiduelle donnée. Le calcul de post-flambage, qui fournit des résultats plus complets et concluants, nécessite un algorithme numérique sophistiqué. De tels modèles sont rarement rencontrés dans la littérature.

Le seul que nous avons trouvé est celui de Tozawa et al. [60]. Il fait partie d'une famille d'algorithmes itératifs permettant de résoudre le problème de flambage d'une plaque sous l'effet des contraintes résiduelles. Suivant le chemin de chargement, ces algorithmes permettent de rechercher une branche de solutions d'un problème non linéaire (souvent de non linéarité géométrique), qui minimise un potentiel élastique.

Il s'agit alors de résoudre un problème de minimisation de l'énergie potentielle totale :

$$\phi = \phi_{\text{int}} + \phi_{\text{ext}} \quad (2.24)$$

$\phi_{\text{int}}$  est l'énergie interne de déformation et  $\phi_{\text{ext}}$  l'énergie potentielle des forces extérieures. Un problème non linéaire est généralement résolu par des méthodes incrémentales. Pour un pas d'incrément infinitésimal de  $\phi$  on a :

$$\Delta\phi = \delta\phi + \frac{1}{2!}\delta^2\phi + \dots \quad (2.25)$$

Dans la position d'équilibre stable, la composante linéaire  $\delta\phi$  est nulle et le terme quadratique  $\delta^2\phi$  doit être défini positif. La charge critique est la plus petite pour laquelle ce dernier n'est plus défini positif.

L'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\phi = \int_{\Omega} \{\gamma_{VK}\}^t \{S\} d\Omega - \{\xi\}^t \{P\} \quad (2.26)$$

où  $S$  et  $\gamma_{VK}$  sont respectivement le tenseur de Piola-Kirchhoff et le tenseur de déformation de Green-Lagrange dans le cadre de l'approximation de von Karman.

On note le vecteur champ de déplacement :

$$\{\xi\} = \{u, v, w\}^t \quad (2.27)$$

Le tenseur de déformation pour une plaque se décompose comme suit :

$$\gamma_{VK} = \gamma_{VK}^l + \gamma_{VK}^{nl} \quad (2.28)$$

$$\gamma_{VK}^l = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^t \quad (2.29)$$

$$\gamma_{VK}^{nl} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^t \quad (2.30)$$

Le problème est discrétisé par la méthode des éléments finis. La forme discrète de la déformation est :

$$\{\gamma_{VK}\} = [B] \{\hat{\xi}\} \quad (2.31)$$

Tel que  $[B]$  est la matrice qui contient les dérivées des fonctions de formes qui peut être décomposée comme suit :

$$[B] = [B_0] + [B_L] \quad (2.32)$$

Relation dans laquelle  $[B_0]$  est une matrice à termes constants correspondant aux petites déformations et  $[B_L]$  est une matrice à termes non constants correspondant à la partie non linéaire de la déformation.

Supposons que l'on peut écrire la relation de comportement sous la forme :

$$\{S\} = [C] \{\gamma_{VK}^{nl}\} \quad (2.33)$$

$C$  : matrice des constantes élastiques.



On a alors le terme quadratique de variation d'énergie :

$$\delta^2\phi = \left( \int_{\Omega} [B]^T \{S\} d\Omega + \int_{\Omega} [B]^T [C][B] d\Omega \right) \{\delta\hat{\xi}\} \quad (2.34)$$

On pose :

$$[K_0] = \int_{\Omega} [B_0]^T [C][B_0] d\Omega \quad (2.35)$$

$$[K_L] = \int_{\Omega} \left( [B_L]^T [C][B_0] + [B_0]^T [C][B_L] + [B_L]^T [C][B_L] \right) d\Omega \quad (2.36)$$

$$[K_{\sigma}] = \int_{\Omega} [B]^T \{S\} d\Omega \quad (2.37)$$

$$[K_T] = [K_0] + [K_L] + [K_{\sigma}] \quad (2.38)$$

Cela conduit à :

$$\delta^2\phi = [K_T] \{\delta\hat{\xi}\} \quad (2.39)$$

Le calcul du point de bifurcation permet de déterminer le seuil critique du flambage avant lequel la plaque est supposée plate ( $w(x,y)=0$ ), donc  $[K_L] = 0$ . L'algorithme de Tozawa et al. est détaillé dans la figure 2-8 ; la plaque est supposée initialement plane. L'algorithme commence par calculer la matrice constante  $[K_0]$ , la matrice  $[K_{\sigma}]$  et le déplacement initial  $\{\hat{\xi}_0\}$  pour une valeur du paramètre de charge initialement nulle :

$$\{\hat{\xi}_0\} = [K_0]^{-1} \{P\}, [K_L] = 0 \quad (2.40)$$

$\{P\}$  est le vecteur second membre qui représente la traction appliqué à la plaque.

La valeur critique du paramètre de charge  $\lambda_c$  vérifie :

$$\delta^2\phi = 0 \Rightarrow ([K_0] + \lambda_c [K_{\sigma}]) = 0 \quad (2.41)$$

Le déplacement  $\{\hat{\xi}^*\}$  qui décrit le mode de flambage est donné par :

$$\{\hat{\xi}^*\} = [K_T]^{-1} \{P\}, [K_L] \neq 0 \quad (2.42)$$

Ensuite, un algorithme de prédiction - correction à l'aide de la méthode de Newton-Raphson est utilisé afin d'effectuer un suivi de courbe, au cours duquel la bifurcation commence dès que le paramètre  $\lambda$  atteint la valeur  $\lambda_c$ ; le calcul de post-flambage est ainsi effectué.

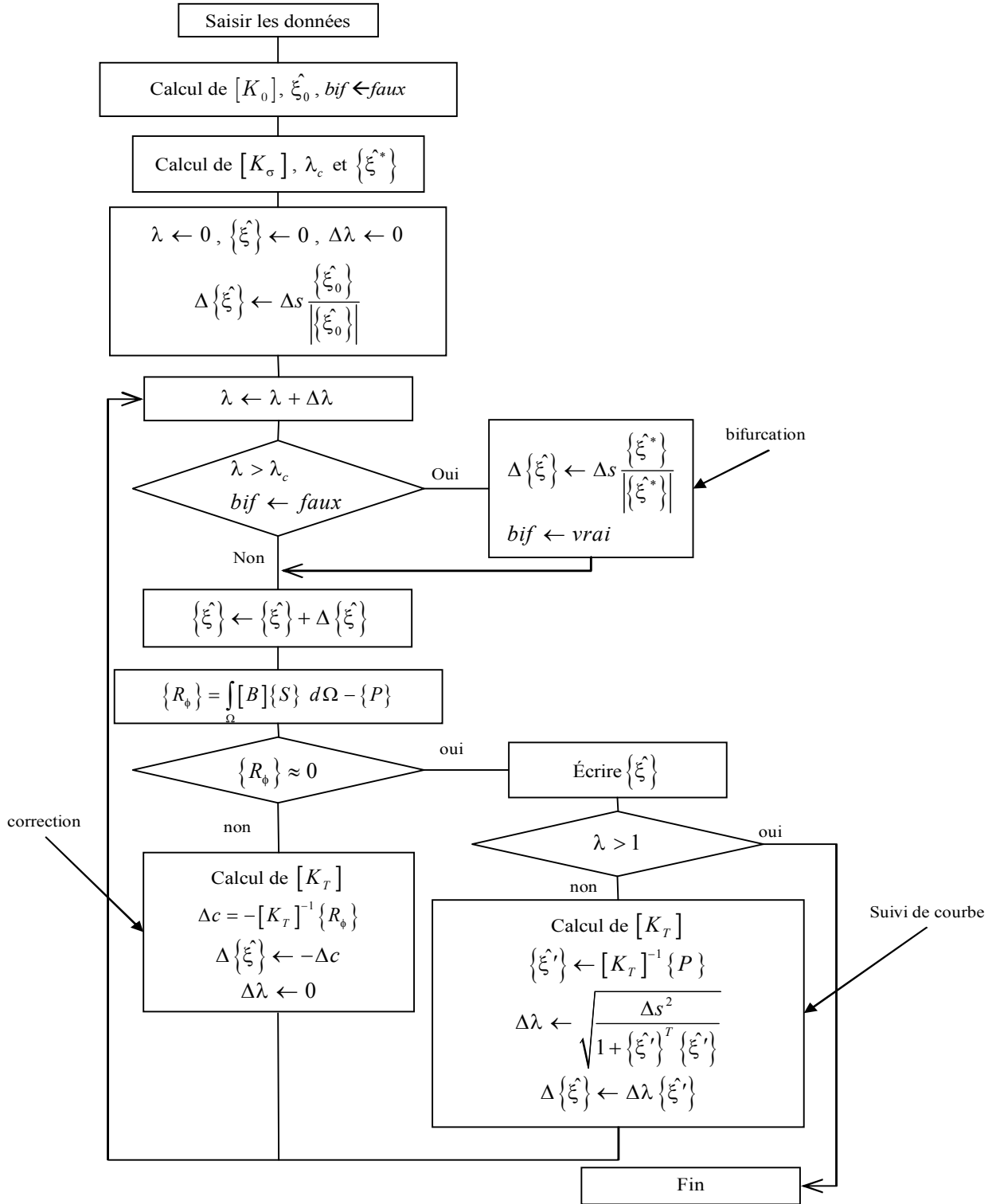


Figure 2-8. Algorithme du calcul du modèle de flambage de Tozawa et al. [60].

Si on analyse les fondements de ce modèle, on constate que rien n'empêche de l'utiliser pour un calcul de flambage pour des chargements complexes, en prenant en compte les composantes du tenseur de contrainte plane ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ). Néanmoins, dans [60], rien n'est précisé sur les amplitudes des défauts obtenus, c'est-à-dire sur l'état post-flambé de la tôle. Les auteurs ne disent pas non plus s'ils ont considéré la totalité des composantes du tenseur de contrainte plane, ou s'ils traitent de façon particulière la « zone 1 » (cf. figure 2-9), sur laquelle Tozawa est pourtant un des premiers à avoir attiré l'attention [26]. De plus, même si ce modèle s'avère relativement avancé par rapport aux modèles de flambage de coques précédemment décrits, il semble tout de même que des conditions aux limites supplémentaires ont été aussi utilisées pour obtenir une solution cohérente par rapport au profil de la contrainte résiduelle imposée<sup>4</sup>. En outre, dans les applications présentées dans cet article, les distributions des contraintes résiduelles utilisées sont relativement simples (profils analytiques) par rapport à celles obtenues en laminage des tôles.

Il est donc temps d'en venir à une analyse de ces simplifications des champs transférés du modèle de laminage au modèle de flambage.

### 2.5.2 Analyse bibliographique de l'approche découplée basée sur le chaînage

Revenons au principe du calcul des défauts de planéité en laminage, couramment utilisé dans la littérature [54,56-60], qui repose sur un chaînage entre un calcul 3D de cédage et un calcul de flambement de coques, tel que détaillé dans le paragraphe 2.4. Dans une telle méthode, les auteurs supposent que les composantes de contraintes résiduelles autres que  $\sigma_{xx}$ , plus faibles, n'interviennent pas de manière significative pour entraîner les défauts de planéité. Mais on peut penser que cette hypothèse est faite avant tout parce qu'il est difficile d'entrer comme donnée d'un calcul de flambage utilisant des coques, ces champs de contraintes complexes (voir le passage par la thermo-élasticité chez Marchand [54]).

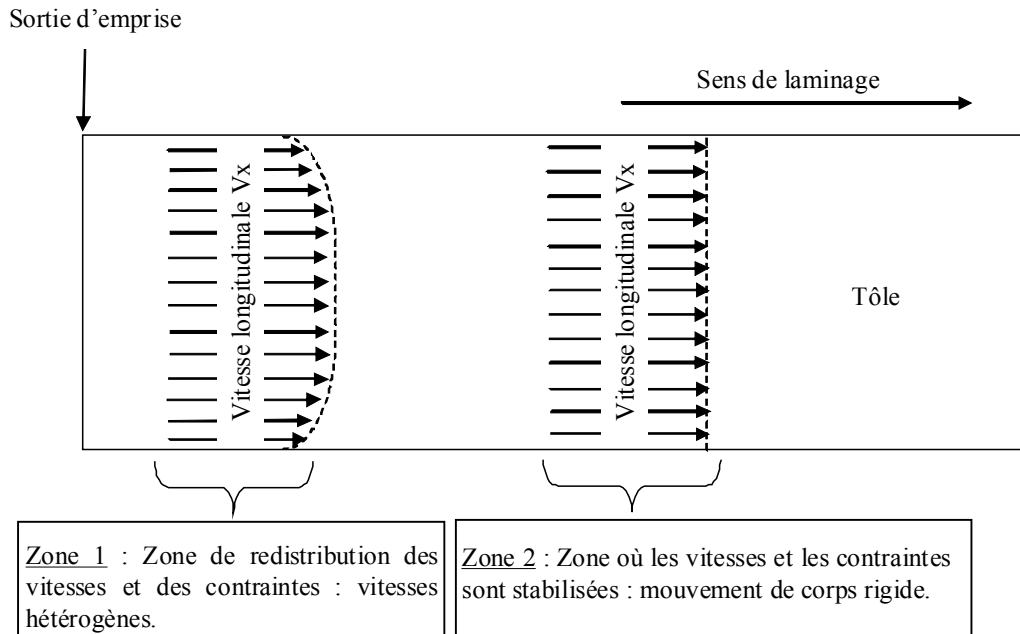
Peut-on justifier cette simplification ? Nous savons que cette hypothèse n'est pas tout à fait correcte, puisque les champs des vitesses se redistribuent dès la sortie de l'emprise pour se stabiliser un peu plus vers l'aval, là où la bande retrouve un mouvement de corps rigide (cf. figure 2-9). Ceci induit de fortes perturbations sur les champs de contraintes. Ainsi, dans la zone transitoire (zone 1 de la figure 2-9) qui est voisine de la sortie de l'emprise, les distributions des champs de contraintes résiduelles sont vraiment complexes. Plus loin, dans la zone où la redistribution de ces champs est établie (zone 2 de la figure 2-9), les composantes autres que la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  s'atténuent et deviennent assez faibles comparées à celle-ci, particulièrement dans le cas des tôles fines. Cela peut justifier les simplifications mentionnées plus haut, sous réserve que les fortes contraintes hétérogènes et multiaxiales de la zone 1 ne puissent pas déclencher le flambement. Ce n'est pas impossible si cette zone est de faible longueur, le flambement demandant une certaine surface pour se développer, de l'ordre de la longueur d'onde du mode sélectionné. Mais cela demande pour le moins d'être vérifié.

D'ailleurs, on sait qu'il existe des défauts de planéité non transverses (« herringbones » obliques, plis longitudinaux) qui ne sauraient être expliqués par la seule composante  $\sigma_{xx}$ . La sélection exclusivement restreint donc le champ d'application des modèles.

#### Conclusion 1 :

Les modèles de flambage de coques existants semblent donc limités par rapport à la complexité des champs de contraintes résiduelles rencontrées en laminage.

<sup>4</sup> Ces conditions aux limites correspondent à une fixation du centre dans le but d'obtenir des bords ondulés et une fixation des bords afin d'obtenir un centre ondulé.



**Figure 2-9. Schématisation de l'évolution de la vitesse longitudinale  $V_x$  dans le sens du laminage d'une tôle.**

Une combinaison fortement couplée entre un modèle 3D de cédage (couplage cage - pièce) et un modèle de flambage de plaque serait le moyen idéal pour une modélisation complète du laminage. Un tel modèle serait capable de fournir une caractérisation assez complète du laminage, y compris les défauts de planéité manifestes qu'il engendre.

**Conclusion 2** : une analyse fortement couplée entre modèle d'emprise et modèle de flambement est souhaitable, au minimum pour fournir une solution de référence qui permette de critiquer, confirmer ou infirmer les approximations vues tout au long de cette analyse bibliographique.

Une autre limitation de l'approche découplée est que toute rétroaction du flambement sur l'état de contrainte et de déformation dans l'emprise est impossible. Or un défaut de planéité *manifeste* pourrait modifier considérablement la *tension de bande* (contrainte axiale) aux deux bouts de l'emprise, facteur clé de la mécanique de l'emprise. Négliger ces phénomènes suppose que la zone 1 ne soit pas atteinte par la relaxation des contraintes par flambement, c'est-à-dire qu'aucun flambement ne s'y produit. Cette zone 1 découplerait alors l'emprise de la zone 2 où les contraintes sont modifiées. Quoique pas impossible, ce schéma demande à être analysé.

## 2.6 Un modèle de flambage complètement couplé mais simple

Les modèles de flambage de coques sont donc les plus précis à l'heure actuelle pour le traitement des problèmes de flambage des tôles laminées. En revanche, ils négligent jusqu'ici le couplage flambage / emprise, supposant que la seconde n'est pas influencée par le premier. Les auteurs découplent ainsi les deux phénomènes en traitant séparément le laminage (sans prise en compte du flambage) et le flambage. En fait, dans la littérature, il existe une exception notable à ce schéma : le modèle de Counhaye [5]. Ce dernier est le seul à avoir développé un modèle de laminage intégrant le flambage dans le calcul. Ce modèle de laminage permet la résolution numérique du problème par la méthode des différences finies le long des lignes de courant, en régime stationnaire (cf. figure 2-10). Il est également doté d'un traitement du flambage basé sur des hy-

pothèses simplistes, mais d'une efficacité satisfaisante. En effet, le modèle repose sur le fait que le flambage d'une structure, causé par les contraintes internes compressives, induit une saturation de celle-ci. Ces contraintes de compression restent alors voisines d'une valeur critique de flambage  $\sigma_c$ . Counhaye [5] estime cette dernière de la manière suivante :

$$\sigma_c = \frac{\pi E h^2}{3 \tilde{l}^2} \quad (2.43)$$

$E$  : module d'Young.

$h$  : épaisseur de la tôle.

$\tilde{l}$  : longueur d'onde des ondulations (supposée de même ordre de grandeur que la largeur de la zone comprimée).

Ainsi, la prise en compte du flambage dans ce modèle revient à relaxer les contraintes de compression aux points d'intégration hors emprise chaque fois qu'elles dépassent  $\sigma_c$ . Cette opération se ramène à ajouter une déformation additionnelle et non compatible avec la contrainte locale, jouant le rôle d'une déformation reprise par le flambage nommée  $\varepsilon^f$ . L'expression de la déformation totale est alors :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^f \quad (2.44)$$

où  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^p$ ,  $\varepsilon^f$  désignent respectivement les déformations élastique, plastique et celle reprise par le flambage.

Même si ce traitement du flambage repose sur des hypothèses simples, la prise en compte du flambage dans ce modèle - couplant la déformation de la cage, la déformation de la tôle et le flambage - rend les résultats plus cohérents par rapport aux mesures expérimentales. La pertinence de ce modèle peut être vue à partir des profils transverses de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage pour un cas donné (figure 2-11), où on note une claire amélioration des résultats quand le flambage est pris en compte dans le calcul. De plus, les zones de défauts de planéité sont correctement détectées dans ce modèle, elles correspondent aux endroits de la tôle où les  $\varepsilon^f$  sont non nulles. Pourtant, la géométrie de ces défauts de planéité ne peut pas être représentée comme dans les modèles de flambage de coques.

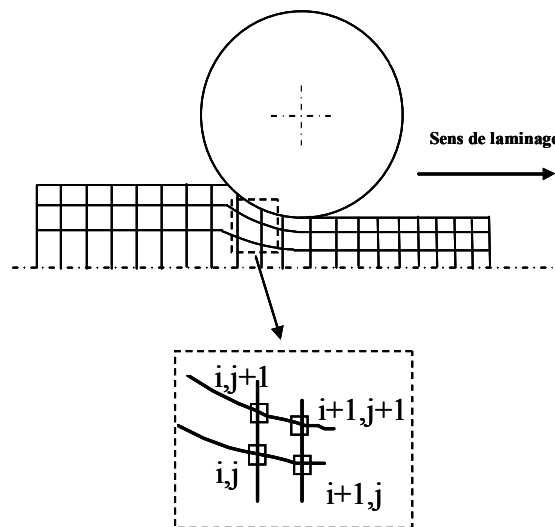
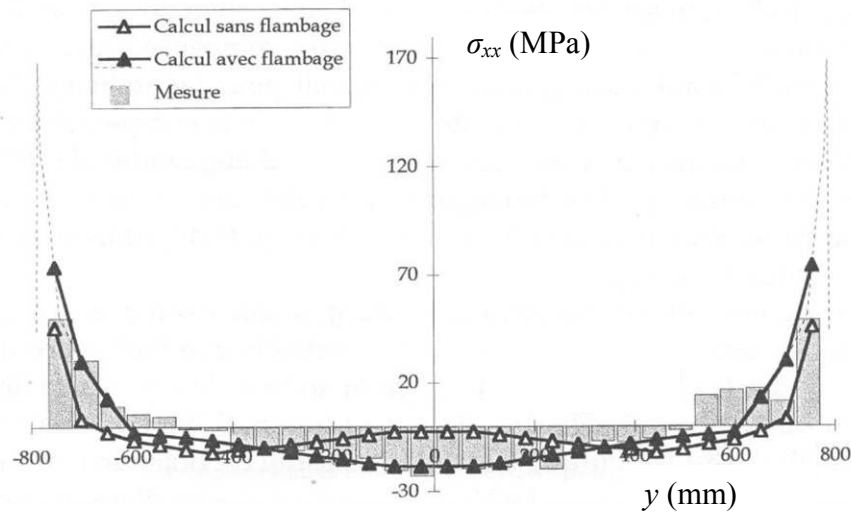


Figure 2-10. Discretisation spatiale et lignes de courants pour le modèle de Counhaye [5].



**Figure 2-11. Profil de la contrainte longitudinale à mi-intercage en aval de l'emprise : la prise en compte du flambage donne des résultats plus réalistes [5].**

## 2.7 Synthèse de l'étude bibliographique

Cette analyse bibliographique a permis d'évaluer les travaux antérieurs sur la modélisation des défauts de planéité en laminage. Ces défauts sont des facteurs déterminants de la qualité du produit. Or l'exigence d'une productivité toujours croissante risque toujours d'entraîner une baisse de qualité, une augmentation des défauts, sauf à multiplier les moyens de contrôle et de régulation. Pour ce faire, il faut améliorer la connaissance du procédé et de sa réponse aux actions des systèmes de pilotage, par la modélisation comme par l'expérience. Dans ce contexte, la modélisation du laminage ayant atteint une grande partie de ses objectifs scientifiques et techniques, ce sont les défauts de planéité qui représentent aujourd'hui une des motivations principales pour poursuivre les efforts de développement de modèles plus sophistiqués. Dans ce chapitre bibliographique, on constate que plusieurs types de modèles ont été développés dans ce but.

La prédiction des défauts de planéité doit impérativement partir d'une modélisation du cé dage, i.e. le couplage entre la déformation de la tôle et celle de la cage. Dans les modèles simples, qui sont généralement analytiques ou semi-analytiques, le flambage n'est pas pris en compte. La plupart du temps, il fait l'objet d'une analyse a posteriori des profils de contraintes en sortie d'emprise, en particulier le profil de la contrainte longitudinale. Suivant le profil transverse de cette contrainte, le défaut de planéité est estimé : il est prédit là où les contraintes résiduelles demeurent compressives. En revanche, cette approche assez « simpliste » néglige l'interaction emprise/flambage évoquée au début de ce chapitre. De ce fait, les modèles plus complets, tels que les modèles EF et généralement les modèles numériques [54-60], offrent une meilleure capacité et des résultats plus précis. Néanmoins, on a vu que le flambage est un phénomène qui n'est pas facile à reproduire en laminage à l'aide de ces modèles.

L'examen des travaux précédents nous permet aussi d'estimer les difficultés que l'on peut rencontrer quand on cherche à modéliser les défauts de planéité en laminage. Elle donne également quelques guides pour une modélisation plus performante. Nous avons tiré deux conclusions :

- le modèle doit intégrer dans l'approche du flambement toutes les composantes de contraintes, si l'on veut pouvoir modéliser tous les types de défauts de planéité avec précision ;

- le modèle doit réaliser d'une façon ou d'une autre un couplage entre le calcul d'emprise et le calcul de flambement, de manière à prendre en compte si elle existe l'influence, sur les contraintes sous emprise, de la relaxation des contraintes hors emprise par le flambement.

Dans la littérature, seul le modèle complètement couplé de Counhaye [5] respecte ces deux impératifs. Il aboutit à des contraintes « loin de l'emprise » qui se comparent très bien aux mesures. Mais nous avons vu d'une part que son critère de flambement, très simple, est critiquable, et que d'autre part, ne pouvant faire de calcul post-flambement, il ne peut nous renseigner sur l'amplitude des défauts, donc sur leur caractère pénalisant, voire dangereux. C'est à ces deux limitations que nous allons nous attaquer dans la suite de ce document.

L'examen de la littérature ne nous a pas permis de découvrir de modèle 3D plus complet, précis et rapide que le logiciel dont nous disposons au Cemef et chez ArcelorMittal, Lam3 / Tec3. Nous partirons donc de cette base. Mais, dépourvu de capacités pour reproduire les défauts de planéité manifestes (voir l'expérience de Marchand [54]), ce logiciel doit être complété par un modèle de flambage. L'idéal serait de réaliser un couplage fort entre ce modèle EF de laminage et un modèle EF de flambage de coques. Des méthodes de couplage de modèles de dimensionnalités différentes comme la méthode Arlequin [62-64] pourraient être utilisées pour relier nos éléments 3D et des éléments coques, mais elles nous semblent très difficiles à mettre en œuvre avec d'un côté une formulation en vitesse (le laminage, l'emprise), de l'autre une formulation statique, en déplacement (le flambement). Avant d'envisager une telle solution, nous avons préféré, dans cette thèse, utiliser des méthodes plus « douces » pour analyser les questions fondamentales posées dans cette étude : influence des autres composantes, influence de la « zone 1 », rétroaction post-emprise – emprise. La démarche suivante a donc structuré nos travaux.

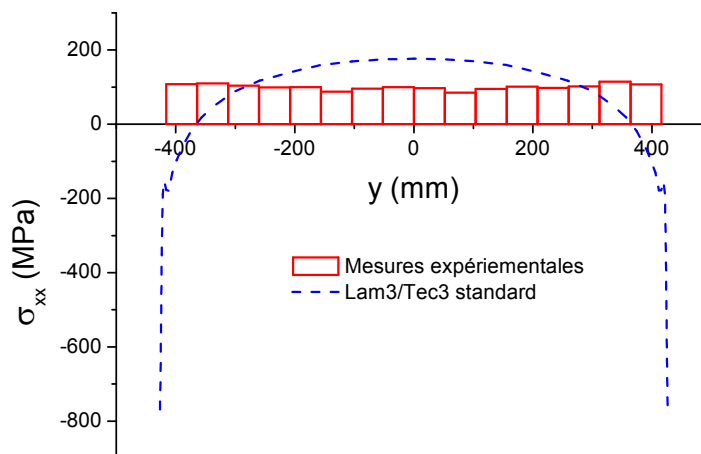
Nous partons de la version standard du modèle Lam3/Tec3 [2] (Lam3/Tec3-Standard), que nous avons complété en couplage fort par un modèle simplifié de flambage, mais tenant compte du couplage emprise / flambage, en nous inspirant des travaux de Counhaye [5], pour aboutir à une version qui sera nommée (Lam3/Tec3-Counhaye). Sur quelques cas industriels de laminage, nous allons comparer les résultats obtenus à l'aide de Lam3/Tec3-Standard et de Lam3/Tec3-Counhaye pour analyser ce que la prise en compte du flambage provoque au niveau de l'emprise. Si le flambage, qui modifie la distribution des contraintes hors emprise, n'a aucun effet sur cette dernière, la méthode découplée chaînant Lam3/Tec3-Standard et un modèle de flambage de coque sera suffisante (cf. chapitre 5). Cet enchaînement consiste à :

- effectuer un premier calcul de laminage à l'aide de Lam3/Tec3-Standard, sans tenir compte du flambage, fournissant des champs de contraintes résiduelles, y compris hors emprise.
- Utiliser ces champs de contraintes résiduelles comme entrées du calcul de flambage de coques qui permet d'obtenir la charge critique, le mode de flambage et l'état post-flambé, ainsi que la nouvelle (et réelle) répartition des contraintes dans la tôle. C'est le modèle fondé sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) qui sera utilisé (cf. chapitre 4)

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le modèle couplé Lam3/Tec3-Counhaye montre une interaction entre le flambage et l'emprise, un couplage plus poussé entre Lam3/Tec3-standard et un modèle de flambage de coque sera proposé. Sans aller jusqu'au couplage fort suggéré plus haut, nous montrerons sa mise en œuvre sous la forme d'un couplage itératif généralisant le calcul en deux étapes décrit ci-dessus (cf. chapitre 6).

### CH.3 Approche couplée utilisant un modèle simple de flambage (Lam3/Tec3-Counhaye)

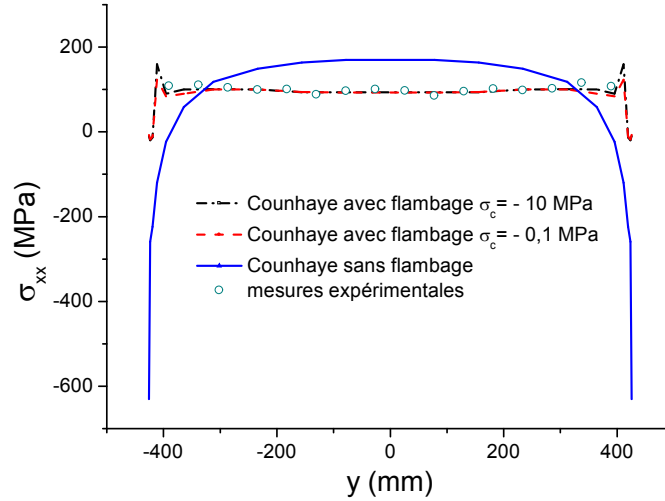
La limitation de Lam3/Tec3-standard peut être observée à partir d’une simulation d’un cas de laminage d’une tôle mince décrit dans le tableau 1 (annexe 4) et que l’on nomme « cas 1 » : cas de laminage d’une tôle de largeur 855 mm et d’épaisseurs en entrée et en sortie d’emprise respectivement de 0.355 et 0.252 mm (forte réduction). Les tractions de laminage appliquées sont de 170 MPa en amont et de 100 MPa en aval. Pour le frottement, on utilise la loi de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0.03. Pour ce cas, on observe une surestimation des niveaux de contrainte longitudinale de compression sur les bords (cf. figure 3-1). Il est bien évident que ces niveaux dépassent largement le niveau critique de flambage  $\sigma_c$  d’une tôle fine. À cette contrainte critique, les bords de la tôle auraient dû flamber et relaxer les contraintes compressives pour les ramener à des niveaux proches de  $\sigma_c$ .



**Figure 3-1. Comparaison entre le profil de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  à mi-intercalage donné par les mesures expérimentales et celui donné par Lam3/Tec3 standard (cas détaillé dans le tableau 1 de l’annexe 4).**

Pour le même cas de laminage, Counhaye [5] a présenté dans sa thèse des résultats de calcul en bonne corrélation avec les mesures expérimentales, en se servant de son modèle de laminage avec flambage hors emprise (cf. figure 3-2 et 2-11).





**Figure 3-2. Profil de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage : Solution donnée par Counhaye [5] avec et sans prise en compte de flambage (cas détaillé dans le tableau 1).**

Cette comparaison montre d'une part que l'absence de flambage conduit à un champ de contrainte faux hors emprise, d'autre part que le traitement appliqué par Counhaye [5] est efficace. Des résultats analogues ont été obtenus sur d'autres cas par Essersi [65]. Par ailleurs, dans la référence [66], Abdelkhalek et al. montrent qu'une mauvaise estimation du bombé thermique ou du bombé tôle en entrée d'emprise, ainsi que la non prise en compte de la thermique, modifient très faiblement les résultats. Par conséquent, ils mettent en évidence que c'est l'absence de prise en compte du flambage qui est la principale cause de l'écart observé entre calcul et mesure. Dans ce chapitre, on vise donc à modéliser les défauts de planéité en laminage en adoptant une approche couplée (couplage : flambage/emprise), en intégrant dans Lam3/Tec3 le modèle simplifié de flambage proposé par Counhaye [5].

### 3.1 Généralités sur le modèle EF de laminage Lam3/Tec3

Lam3/Tec3 est un logiciel dédié à la simulation des procédés de laminage des produits plats, tels que les tôles métalliques. Développé par Hacquin [4], il constitue une combinaison de deux modèles :

- Lam3 pour le calcul de la déformation élastique-viscoplastique de la bande ;
- Tec3 pour le calcul de la déformation élastique de la cage.

Le logiciel ainsi obtenu est nommé Lam3/Tec3 ; il prend aussi en compte le couplage thermomécanique cage/bande.

Nous présentons ci-dessous Lam3/Tec3 en nous limitant toutefois à la synthèse de ses fondements détaillés dans les références suivantes [2, 3, 4].

#### 3.1.1 Lam3

Lam3, modèle de calcul de laminage optimisé pour le laminage des tôles, utilise une formulation quasi-eulérienne. On considère l'équation d'équilibre (3.1) complétée par la loi de comportement élastique-viscoplastique (3.2) et (3.3). Pour tout  $V^*$  cinématiquement admissible,

$$\int_{\Omega} \sigma(V) : D^* d\Omega - \int_{\partial\Omega_c} \sigma_t V^* dS - \int_{\partial\Omega_c} \sigma_n \underline{n} V^* dS - \int_{\partial\Omega_f} T^{imp} V^* dS = 0 \quad (3.1)$$

Si  $\sigma^d : \dot{\sigma}^d < \frac{2}{3} \sigma_0^2(\dot{\bar{\epsilon}}, \bar{\epsilon})$  ou  $\left( \sigma^d : \dot{\sigma}^d = \frac{2}{3} \sigma_0^2(\dot{\bar{\epsilon}}, \bar{\epsilon}) \text{ et } \sigma^d : \dot{\sigma}^d < 0 \right)$  : élasticité

$$d = \frac{(\dot{\sigma}^d)^J}{2\mu}, \quad \dot{\sigma}^h = -\chi \cdot \text{Trace}(D) \quad (3.2)$$

Sinon (c'est-à-dire si  $\sigma^d : \dot{\sigma}^d = \frac{2}{3} \sigma_0^2(\dot{\bar{\epsilon}}, \bar{\epsilon})$  et  $\sigma^d : \dot{\sigma}^d \geq 0$ ) : plasticité

$$d = \frac{(\dot{\sigma}^d)^J}{2\mu} + \frac{3}{2} \dot{\bar{\epsilon}} \cdot \frac{\sigma^d}{\sigma_0(\dot{\bar{\epsilon}}, \bar{\epsilon})}, \quad \dot{\sigma}^h = -\chi \cdot \text{Trace}(D) \quad (3.3)$$

$D^*$  est le tenseur de vitesse de déformation virtuelle, qui dérive du champ de vitesse virtuelle  $V^*$  ;  $\sigma_t$  et  $\sigma_n$  sont respectivement la contrainte de cisaillement causée par le frottement et la pression exercée par les cylindres de travail sur la tôle dans la zone de contact  $\partial\Omega_c$ .  $T^{imp}$  correspond aux vecteurs contraintes externes imposés : tractions amont et aval de laminage.  $\sigma^d$  est le déviateur des contraintes de Cauchy  $\sigma$ ,  $\sigma^h$  est la pression hydrostatique et  $\chi$  est la compressibilité élastique. Enfin,  $D$  désigne le tenseur taux de déformation qui admet  $d$  comme déviateur.  $(\dot{\sigma}^d)^J$  est la dérivée de Jaumann du déviateur des contraintes.

L'équation (3.3) décrit la décomposition élastique/plastique du tenseur  $d$ , en adoptant la loi élastique de Hooke, et la loi d'écoulement d'un matériau de von-Mises comme loi d'écoulement plastique.  $\mu$  est le coefficient de cisaillement de Lamé,  $\bar{\epsilon}$  et  $\dot{\bar{\epsilon}}$  sont la déformation et la vitesse de déformation équivalentes. Dans le critère de plasticité de Huber/von-Mises,  $\sigma_0$  est la contrainte d'écoulement plastique.

L'algorithme global de la version stationnaire du modèle thermomécanique Lam3/Tec3 est présenté dans la figure 3-3-(a). On rappelle que Lam3/Tec3 utilise un maillage structuré composé d'éléments hexaédriques. Ainsi, les nœuds de ce maillage forment des lignes de courant et sont réactualisés pour y rester. Les points d'intégration dans les éléments successifs en  $x$  sont supposés être aussi sur des lignes de courant, suivant lesquelles les variables d'état sont intégrées (cf. § 2.3.2.iii, figure 2-3). Les positions  $\mathbf{x}$  ( $x, y, z$ ) des nœuds du maillage obéissent à l'équation (3.4), en utilisant le champ  $V(\mathbf{x})$  solution de (3.1)-(3.3) :

$$\begin{aligned} y_{noe+1} &= y_{noe} + \int_{x_{noe}}^{x_{noe+1}} \frac{V_y(\mathbf{x})}{V_x(\mathbf{x})} dx \\ z_{noe+1} &= z_{noe} + \int_{x_{noe}}^{x_{noe+1}} \frac{V_z(\mathbf{x})}{V_x(\mathbf{x})} dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $noe$  et  $noe+1$  sont les numéros de deux nœuds consécutifs sur une même ligne de courant (numérotation de l'amont vers l'aval).

Cette équation (3.4) est résolue itérativement avec le système (3.1-3.3) pour améliorer l'approximation de la forme du domaine sur lequel ce dernier est résolu. Entre deux itérations sont aussi calculées la déformation élastique de la cage si elle est requise (§ 3.1.2), et les températures dans la bande et dans le cylindre si le couplage thermique est demandé. L'actualisation du

contact bande – cylindre lors de ces itérations, pendant lesquelles les deux objets changent de forme, est un point délicat, objet d’une grande attention qu’il serait trop long de détailler ici [4].

La formulation étant stationnaire, l’intégration en temps est remplacée par la progression en espace (le champ de vitesse réalisant cette équivalence temps – espace). Il n’en reste pas moins que pour résoudre les équations élastoplastiques, équations différentielles en temps, un schéma « temporel » doit être utilisé. Le « pas de temps » représente en fait le temps de parcours d’un point d’intégration à son successeur sur la ligne de courant. Ce pas de temps dépend donc de la position, et dans [4], ce schéma est appelé « Eulérien Lagrangien à Delta  $t$  Hétérogène » (ELD-TH) – ou en anglais, GLHTS (Generalized Large Heterogeneous Time-Step). Pour des raisons de stabilité, cette intégration sur les lignes de courant peut faire l’objet d’un schéma itératif supplémentaire (à chaque itération, on intègre les équations de comportement de chaque point d’intégration à son successeur seulement, figure 3-3-(a)).

Dans ce schéma, l’intégration des équations (3.2)-(3.3) se fait par un schéma classique d’Euler vers l’arrière ( $\theta$ -méthode avec  $\theta = 1$ ), et la solution des équations d’équilibre prend en compte ces contraintes réactualisées, selon l’équation « lagrangienne réactualisée » :

$$\int_{\Omega+\Delta\Omega} (\sigma + \Delta\sigma) : D^* d\Omega = \int_{\partial\Omega+\Delta\partial\Omega} (T + \Delta T) V^* dS \quad (3.5)$$

en sorte que  $T$  représente le vecteur contrainte appliqué aux frontières  $\partial\Omega$  du domaine de la bande  $\Omega$  ( $T = \sigma_n, \tau, T^{imp}$ ).

Cette équation est discrétisée par des éléments finis hexaédriques linéaires, à huit nœuds, selon le schéma standard de Galerkin. Pour éviter les phénomènes de « verrouillage », le terme en  $\sigma^h \cdot \text{Trace}(D)$ , qui provient de la décomposition déviateur – pression de la première intégrale, est sous-intégré avec un seul point d’intégration, situé au centre de l’élément.

Le système non linéaire en vitesse résultant de cette discrétisation est résolu en utilisant une méthode de Newton - Raphson accélérée par une recherche linéaire (line search).

### 3.1.2 Tec3

À partir du champ de contrainte calculé dans la tôle, la pression de contact tôle/cylindres  $\sigma_n$  est déduite de la relation (3.6).

$$\sigma_n = \sigma \cdot \underline{n}_c \quad (3.6)$$

$\underline{n}_c$  est la normale locale à la surface de contact tôle/cylindre ( $\partial\Omega_c$ ).

Cette contrainte  $\sigma_n$  est utilisée comme une entrée du modèle de calcul 3D de la déformation élastique de la cage (Tec3) qui est détaillé dans [3]. La déformation d’un cylindre de la cage est décrite par une combinaison de la théorie des poutres de Timoshenko (comprenant l’effet de cisaillement transverse) avec le modèle de Boussinesq pour la déformation d’un milieu semi-infini. Le contact entre les cylindres de la cage, y compris le phénomène de roll-kiss<sup>5</sup> en laminage de tôles fines, est pris en compte en utilisant le modèle de contact Hertzien 3D.

Les équations décrivant la réponse élastique de la cage sous l’effet de la contrainte  $\sigma_n$  sont discrétisées en utilisant la technique des coefficients d’influence (cf. chapitre 2). L’étape finale de l’algorithme décrit dans la figure 3-3-(a), consiste en la détermination de l’équation d’équilibre de la cage soumise aux efforts de contact (contrainte normale et tangentielle de frottement), ce

<sup>5</sup> La mise en contact des cylindres de travail de part et d’autre de la tôle : contact cylindre de travail/cylindre de travail.

qui permet l'actualisation de la flexion et de l'aplatissement des cylindres. Les équations discrétisées forment un système non linéaire à cause de la dépendance des longueurs de contact entre cylindres à la répartition de  $\sigma_n$ . Ainsi, la méthode itérative de Newton - Raphson est utilisée.

### 3.2 Implémentation du modèle simplifié de flambage dans Lam3/Tec3

Le modèle simplifié de flambage de Counhaye est implémenté en utilisant le critère de flambage (2.43) comme montré figure 3-3-(b) : en chaque point d'intégration de Gauss  $G$ , la déformation reprise par le flambage  $\lambda_i^f$  ( $i=I,II$ ) est déduite des incréments des contraintes principales dans le plan de la tôle  $\sigma_i$  ( $i=I,II$ ) selon (3.7). Une fois cette déformation exprimée dans le repère du laboratoire  $(x,y,z)$ , elle est rajoutée à l'incrément de déformation globale  $\varepsilon$  à chaque itération de Newton - Raphson  $it$ , comme le montrent les équations de la figure 3-3-(b). À la convergence, l'équilibre mécanique est respecté (résidu  $\rightarrow 0$ ) et les contraintes locales hors emprise sont relaxées là où le flambage s'est produit.

$$\begin{cases} (\lambda_i^f)^G = \frac{\sigma_i^G - \sigma_c}{E} & \text{si } \sigma_i^G < \sigma_c < 0 \\ (\lambda_i^f)^G = 0 & \text{si } \sigma_c \leq \sigma_i^G \end{cases} \quad (i = I, II) \quad (3.7)$$

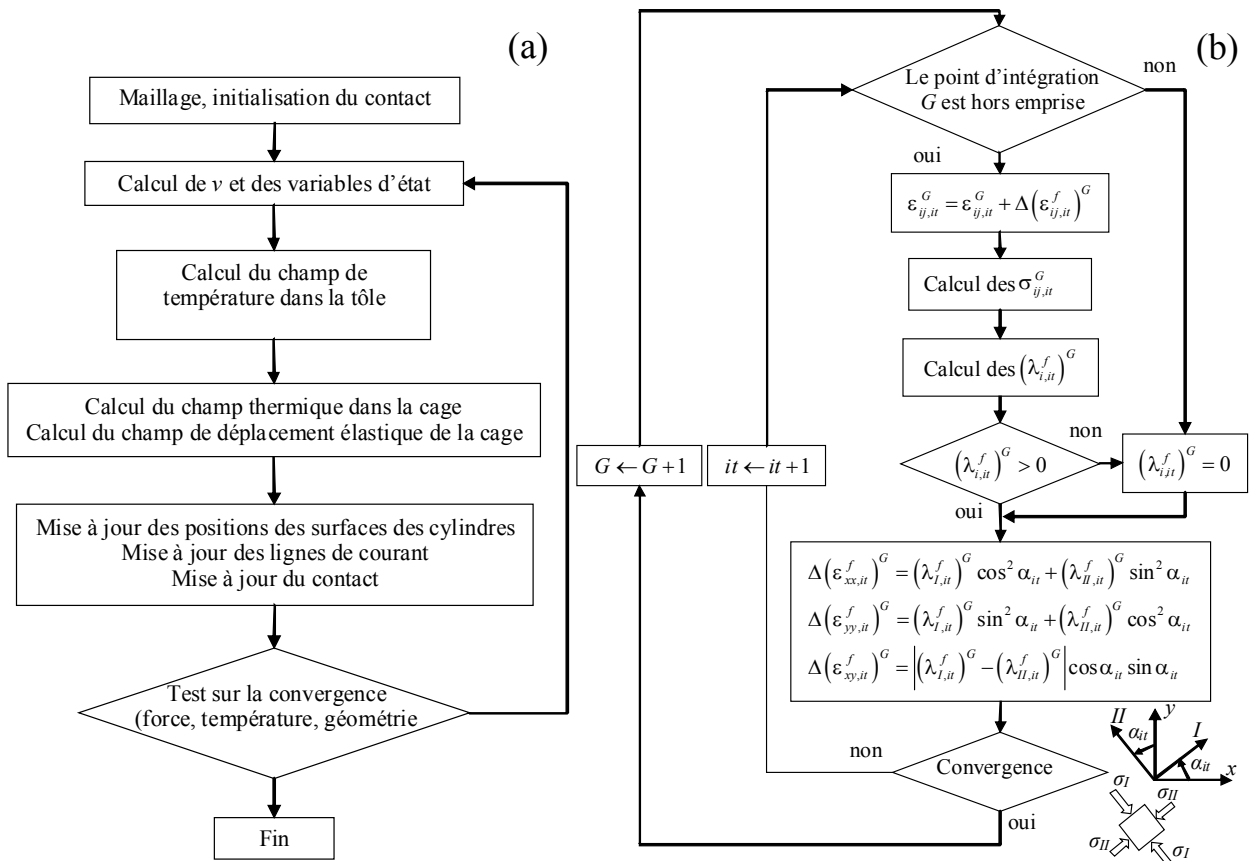
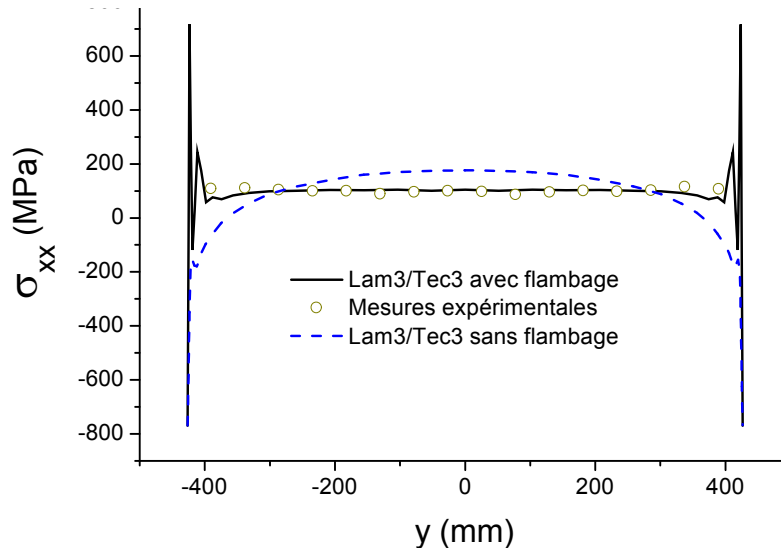


Figure 3-3. (a) Algorithme général du logiciel Lam3/Tec3, (b) Algorithme de couplage de Lam3/Tec3 avec le modèle simplifié de flambage.

### 3.3 Problèmes de convergence et introduction d'un terme d'amortissement

Dans ce paragraphe, le « cas 1 » (cas de laminage de fer blanc, dernière cage tandem), présenté dans le tableau 1 de l'annexe 4, est considéré dans le but d'effectuer une comparaison avec l'expérience et les résultats obtenus par Counhaye [5]. La figure 3-4 montre le profil transversal de la contrainte  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage<sup>6</sup>, calculé en utilisant l'algorithme exposé ci-dessus (figure 3-3-(b)).



**Figure 3-4. La contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  hors emprise donnée par Lam3/Tec3-Counhaye : forte fluctuation numérique aux bords.**

En analysant la figure 3-4 on constate que pour ce cas :

- sans prise en compte du flambage, les contraintes à mi-intercage sont très différentes des mesures expérimentales<sup>7</sup>. Même si la mesure sur l'extrême rive est impossible, il paraît clair que la solution numérique est inexacte.
- l'implémentation du modèle de flambage simplifié rapproche les résultats des mesures expérimentales dans le sens de la relaxation des contraintes sous l'effet du flambage.
- en revanche, de fortes oscillations apparaissent aux bords, là où les mesures ne sont pas disponibles. Ces oscillations ne sont clairement pas physiques et résultent d'instabilités numériques.

En utilisant ce modèle simplifié, le flambage est traité à l'échelle d'un élément, et même plus précisément de chaque point matériel (les contraintes de compression sont relaxées en chaque point d'intégration quand elles dépassent localement  $\sigma_c$ ). Par conséquent, l'algorithme de flambage risque de forcer la structure à flamber à des endroits et à des échelles trop exiguës pour que le flambage puisse s'y produire (il faudrait imaginer des modes de longueur d'onde quasi-nulle). Peut-être cela rend-il le problème EF à résoudre trop fortement contraint, d'où la difficulté de convergence qui se traduit par les oscillations numériques. Pour résoudre ce problème de convergence, nous avons été amenés à utiliser un paramètre d'amortissement  $\eta$ . Ce paramètre est utilisé

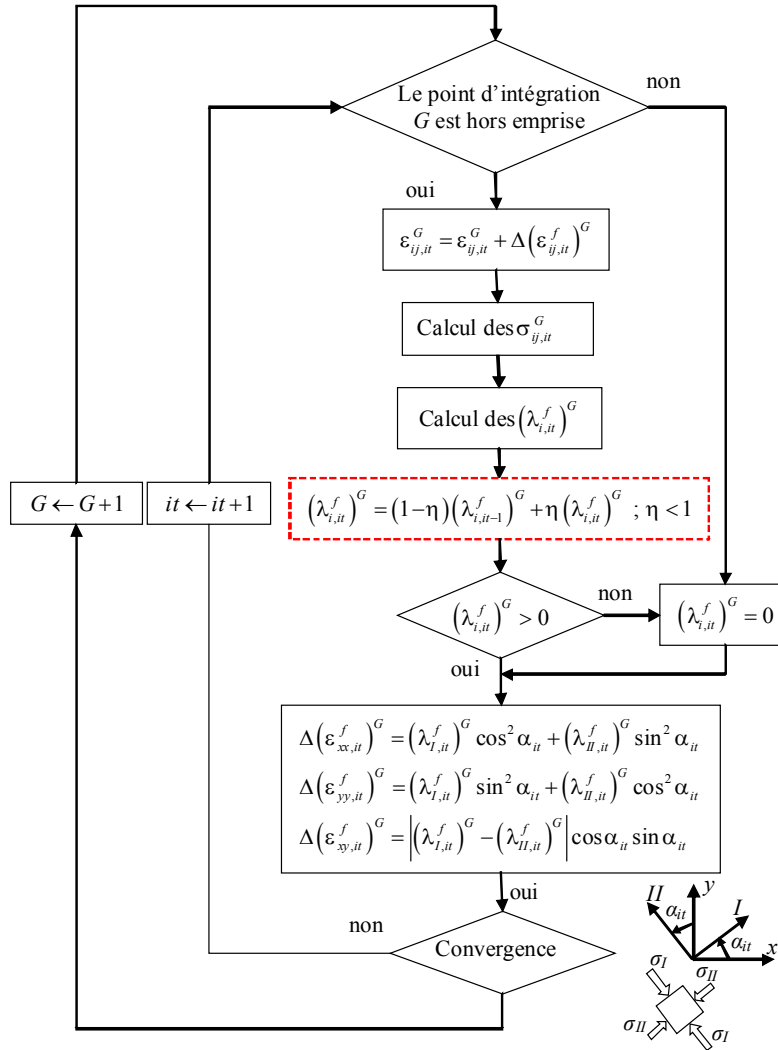
<sup>6</sup> La position mi-intercage est située à un endroit plus ou moins équidistant de deux cages successives. À cet endroit qui est loin de l'emprise, les contraintes et les vitesses sont stabilisées et c'est à peu près là que les mesures de planéité à l'aide des rouleaux tensiomètres (cf. 1.2.4.i) sont prises.

<sup>7</sup> Celles-ci sont effectuées à l'aide des rouleaux de planéité (ou tensiomètre) par ArcelorMittal.

de façon à ce qu'à chaque itération de Newton - Raphson  $it$ , la déformation reprise par le flambage est remplacée par une moyenne pondérée avec sa valeur antécédente, comme décrit dans la relation (3.8).

$$\lambda_{i,it}^f \leftarrow (1-\eta) \times \lambda_{i,it-1}^f + \eta \times \lambda_{i,it}^f \quad ; \quad i = I, II \quad (3.8)$$

Le nouvel algorithme de couplage dans Lam3/Tec3-Counhaye devient celui de la figure 3-5.



**Figure 3-5. Algorithme de couplage de Lam3/Tec3 avec le modèle simplifié de flambage en utilisant le paramètre d'amortissement  $\eta$ .**

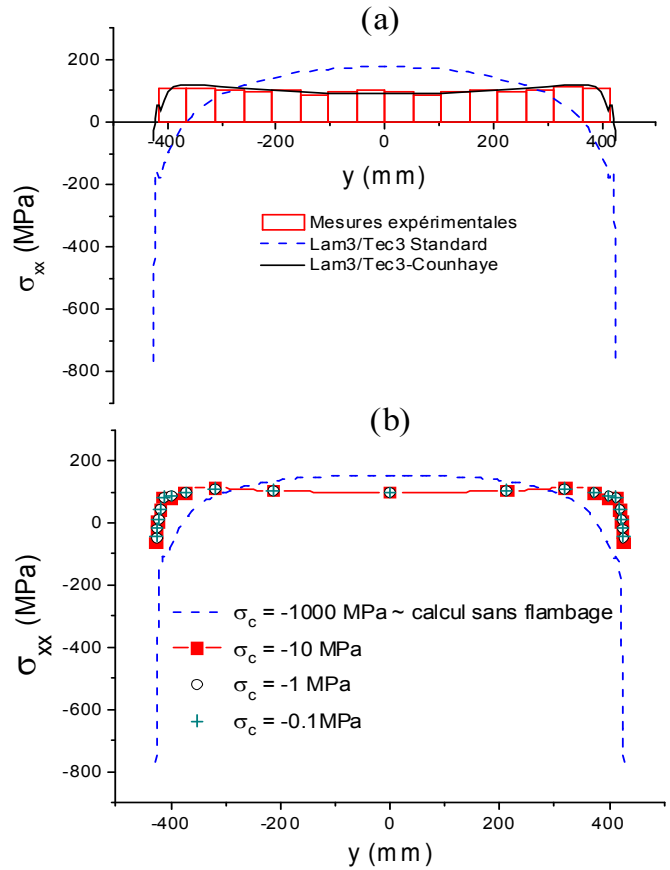
L'utilisation du paramètre d'amortissement a apporté une amélioration considérable des résultats, qui se superposent maintenant avec les mesures expérimentales comme le montre la figure 3-6-(a). D'autre part, la figure 3-6-(b) montre aussi que les résultats obtenus sont quasi-invariants par rapport à la valeur de  $\sigma_c$ , quand cette dernière est choisie petite devant le plus haut niveau de compression  $\sigma_{\max}^-$  dans la tôle hors emprise (ici  $\sigma_{\max}^- = -760$  MPa et  $\sigma_c$  vaut : -10, -1 et -0.1 MPa). Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand  $\sigma_c$  est choisie excessivement grande (ici -1000 MPa), l'équation (3.7)-b est partout vérifiée hors emprise, le calcul est donc équivalent au calcul standard de Lam3/Tec3.

On peut de plus dire que le présent modèle (Lam3/Tec3-Counhaye basé sur la MEF) et le modèle de laminage de Counhaye (MDF), bien qu'assez différents, aboutissent à des résultats semblables - avec ou sans flambage (cf. les figures 3-2 et 3-6). Cela peut être considéré comme une validation. Nous verrons cependant plus loin que les résultats présentent localement des différences.

Si le résultat donné par Lam3/Tec3-Counhaye correspond à la solution réelle du problème, cette dernière doit être indépendante du paramètre numérique  $\eta$ . Ce point doit maintenant être vérifié. De plus, il reste à établir un critère de choix précis et préalable de la valeur de  $\eta$  adéquate pour faciliter la convergence. Pour cela, l'examen de l'effet de  $\eta$  sur les résultats, la convergence et le coût CPU de calcul, a été effectué pour le « cas 1 ». D'après la figure 3-7, on constate que les résultats sont quasi-invariants pour une plage de valeur du paramètre d'amortissement  $\eta$  allant de  $10^{-1}$  à  $10^{-3}$  environ. Cependant, pour des valeurs comprises entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$ , on commence à apercevoir une sensibilité à  $\eta$ . Pour des valeurs encore plus faibles, l'amortissement devient trop faible et la prise en compte du flambage ne se fait plus. On obtient ainsi des résultats très ressemblants à ceux de Lam3/Tec3-standard.

Concernant le coût de calcul, qui reflète la facilité de convergence, on a remarqué une variation notable à partir de  $\eta \approx 10^{-3}$ . Au dessus de cette valeur, le temps de calcul augmente très sensiblement. Cette augmentation s'explique par la difficulté de convergence qui se manifeste alors. Pour des valeurs de  $\eta$  plus petites, le temps du calcul tend asymptotiquement vers le coût en CPU d'un calcul de Lam3/Tec3-standard, c'est-à-dire d'un calcul sans flambement (cf. figure 3-8). Cela signifie que diminuer  $\eta$  facilite la convergence d'une part, mais d'autre part tend à faire appliquer de moins en moins le critère simplifié de flambage. Ainsi,  $\eta$  doit être choisi le plus petit possible sans annihiler la prise en compte du flambage. Pour le « cas 1 », la valeur optimale de  $\eta$ , qui permet un minimum en CPU et une stabilité des résultats, est comprise donc entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$ .

On retrouve les mêmes effets de  $\eta$  sur les résultats et la convergence dans le « cas 2 » détaillé dans le tableau 2 de l'annexe 4, cas de laminage d'une tôle de largeur 1224 mm (tôle large) et d'épaisseurs en entrée et en sortie d'emprise respectivement de 0.58 et 0.572 mm (très faible réduction). Les tractions de laminage appliquées sont de 207 MPa en amont et de 27.3 MPa en aval. On utilise la loi de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0.13. Pour ce cas, la valeur optimale identifiée de ce paramètre est beaucoup plus petite, soit aux alentours de  $10^{-5}$  et de  $10^{-6}$ . Ainsi, il n'existe pas une valeur de  $\eta$  valable pour tous les cas de laminage. De plus, il est difficile de lui affecter au préalable une valeur convenable, puisque aucun critère n'a été identifié à présent. Actuellement,  $\eta$  est donc déterminé de la manière suivante :

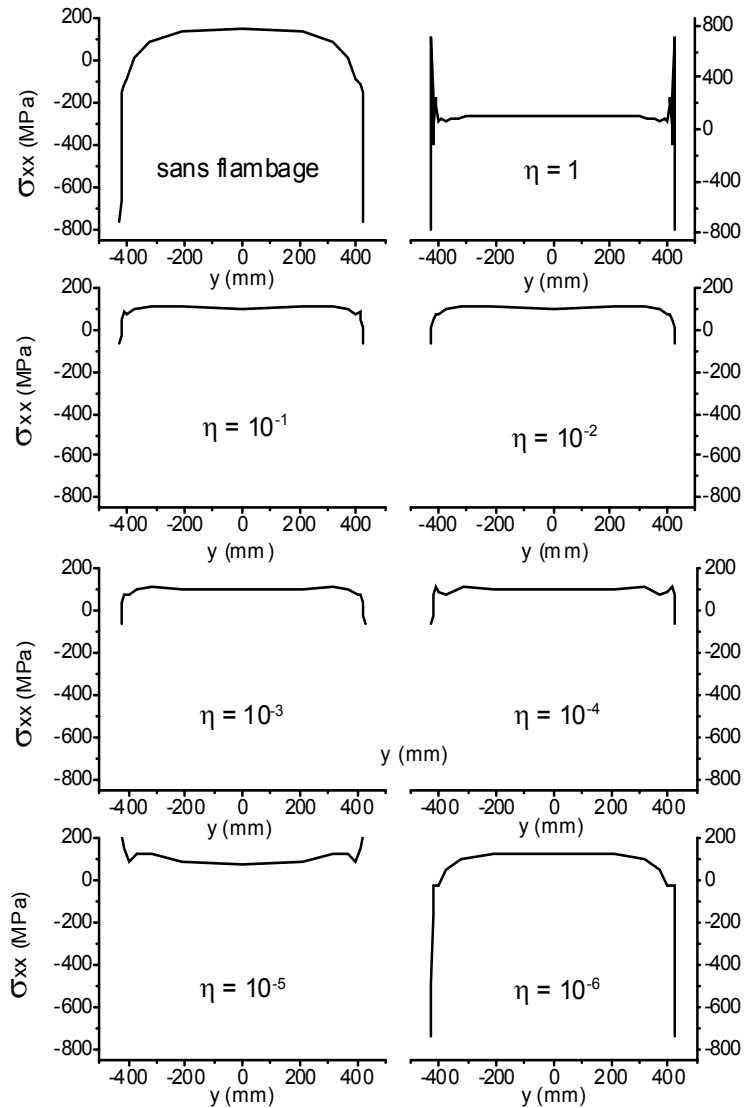


**Figure 3-6. (a) : comparaison entre le profil transversal de la contrainte  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage donné par les mesures expérimentales, Lam3/Tec3-standard et Lam3/Tec3-Counhaye (« cas 1 ») : l'utilisation du paramètre d'amortissement  $\eta$  donne des résultats qui coïncident avec les mesures expérimentales. (b) : effets de la valeur de  $\sigma_c$  sur le profil de contrainte.**

- Lancer le calcul de Lam3/Tec3-Counhaye avec une grande valeur de  $\eta$  (généralement on commence avec une valeur proche de 1).
- Les difficultés de convergence, si elles existent, sont tout de suite observées dès la première ou la deuxième minute du calcul par le nombre important d'itérations.
- Si c'est le cas, on arrête le calcul et on le recommence avec un  $\eta$  plus petit (d'un test au suivant, on divise généralement  $\eta$  par 10).
- Cette procédure est répétée tant qu'on n'atteint pas un comportement convenable.

En examinant l'évolution des contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  le long des lignes de courant sur la figure 3-9, on constate que les contraintes compressives ne sont pas relaxées immédiatement à la sortie de l'emprise. Elles évoluent encore dans le sens du laminage pour s'approcher progressivement de  $\sigma_c$  (ici  $\sigma_c = -10$  MPa). D'ailleurs, on note que sur une longueur non négligeable en aval de l'emprise, les contraintes de compression sur les bords excèdent  $\sigma_c$ , ce qui paraît paradoxal, et contraire au modèle de Counhaye [5] où le critère  $\sigma \geq \sigma_c$  est respecté en tout point (cf. figure 3-10), ce qui est d'ailleurs physiquement excessif comme nous l'avons souligné. Cela signifie que dans notre calcul, les défauts de planéité n'apparaissent pas aussitôt après la sortie de l'emprise. D'ailleurs, on enregistre dans ces environs des déformations  $\lambda$  insignifiantes.

Compte tenu du principe d'intégration des contraintes le long des lignes de courants que Lam3/Tec3 utilise, la relaxation graduelle des contraintes se traduit par une croissance progressive des déformations reprises par le flambage dans la direction de laminage. Cela implique que la déformation totale  $\lambda^f (= (\lambda_I^f, \lambda_{II}^f))$  qui a permis de ramener  $\sigma_{xx}$  en accord avec les mesures expérimentales à une position loin en aval de l'emprise, est un cumul des  $\lambda^f$  calculées en amont de cette position, sur la même ligne de courant. Peut-être que, sans l'utilisation du paramètre d'amortissement  $\eta$ , la relaxation des contraintes dans la sortie immédiate de l'emprise serait brutale, causant les problèmes de convergence observés dans la figure 3-4. L'utilisation de  $\eta$  permet donc d'adoucir la relaxation des contraintes, pour qu'elle soit progressive. Dans le cas présent, cela correspond-il à la réalité ? En d'autres termes, peut-on assimiler la relaxation progressive de la contrainte  $\sigma_{xx}$  (sur la figure 3-9) à des ondulations sur les bords (bords longs) qui commencent à apparaître à partir d'une certaine distance ( $\sim 10$  mm) de l'emprise et s'amplifient progressivement vers l'aval ? C'est un point que nous devons confronter au modèle plus puissant de flam-



**Figure 3-7. Comparaison des profils de la contrainte  $\sigma_{xx}$  (à mi-intercage) sans et avec flambage en utilisant différentes valeurs du paramètre  $\eta$ .**



bage, que nous détaillerons dans le chapitre 4 et dont nous analyserons les résultats ultérieurement (cf. chapitres 5 et 6).

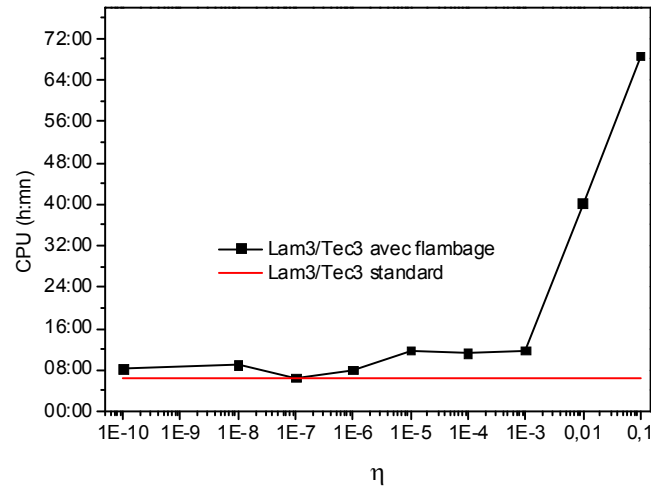


Figure 3-8. Évolution du temps CPU en fonction du paramètre d'amortissement  $\eta$  pour le « cas 1 ».

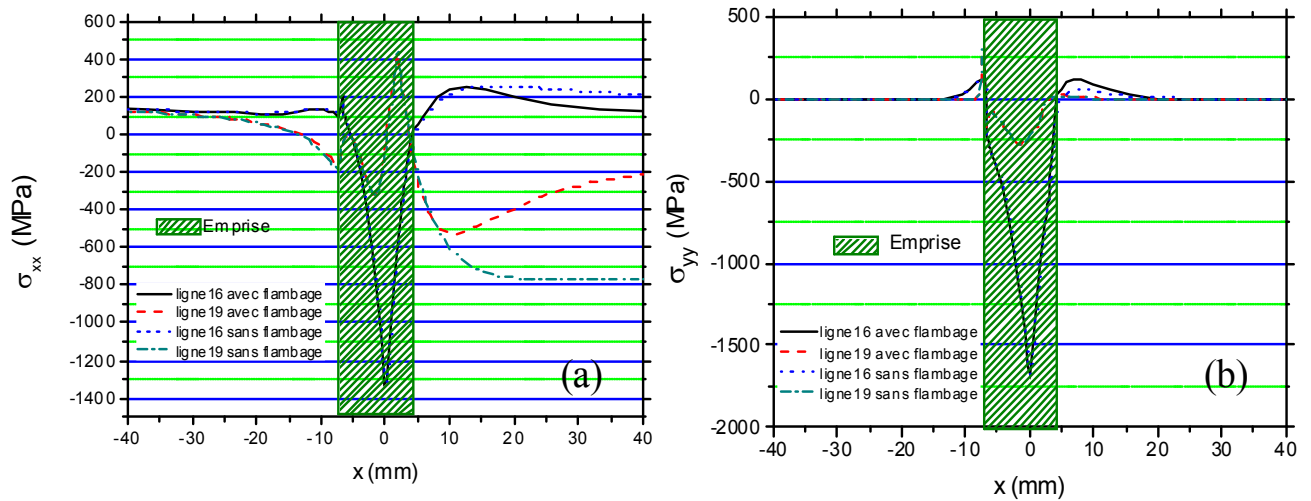


Figure 3-9. Évolution des contraintes  $\sigma_{xx}$  (a) et  $\sigma_{yy}$  (b) le long des lignes de courant 16 et 19 (rive : cf. figure 3-11) de l'amont vers l'aval de l'emprise.

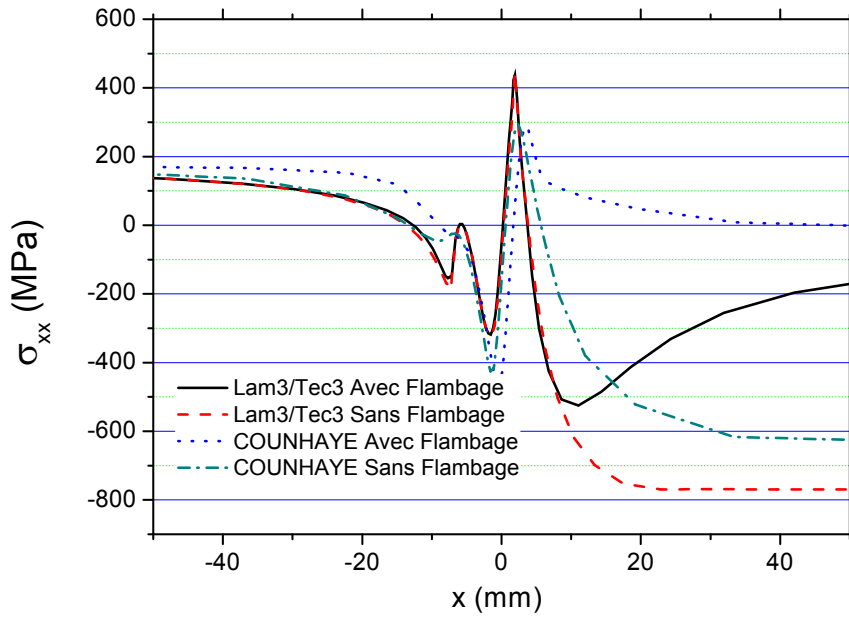


Figure 3-10. Évolutions de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  le long de la rive (avec et sans flambage) : comparaison entre les résultats de Lam3/Tec3 et ceux de Counhaye [5].

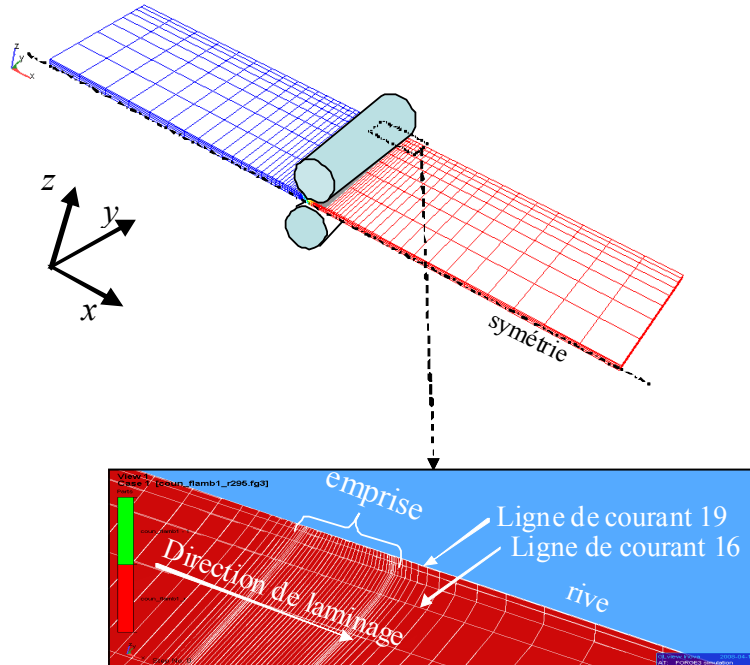
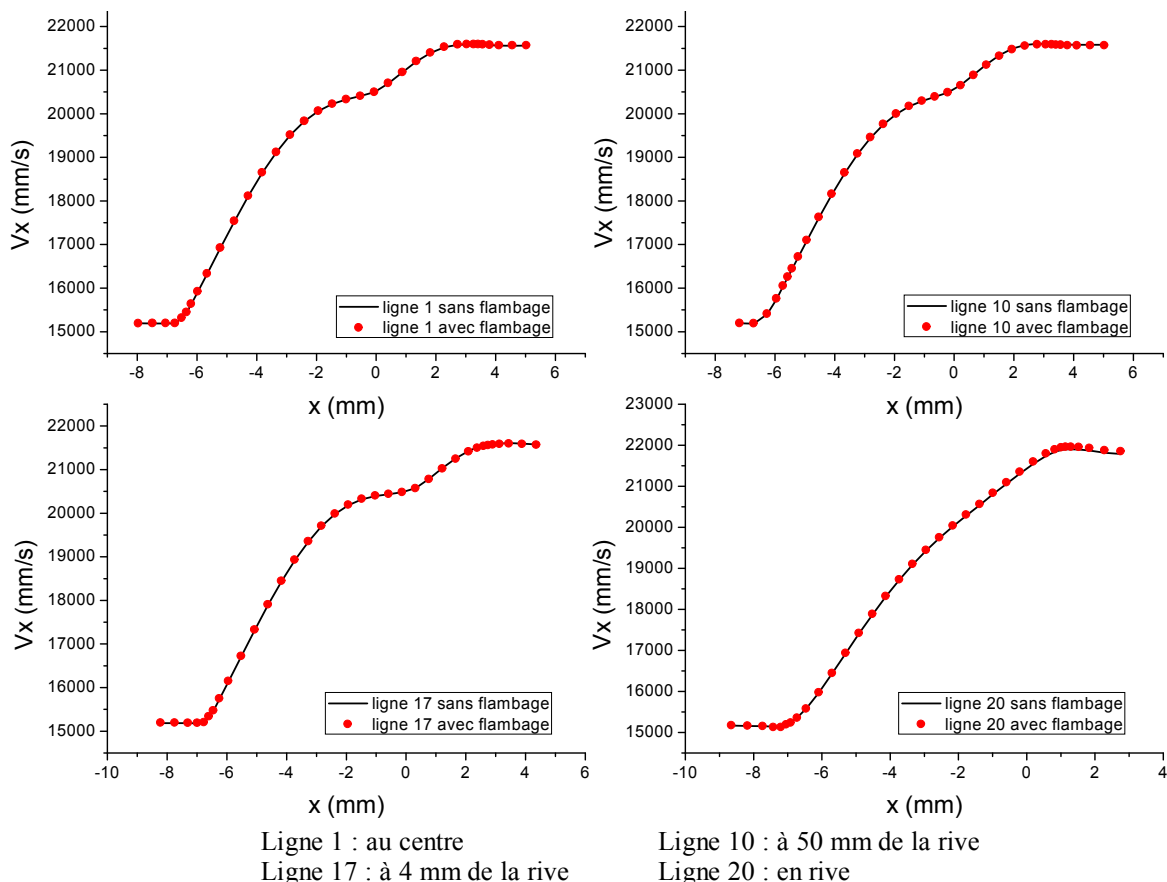


Figure 3-11. La topologie du maillage utilisé par Lam3/Tec3 (ici, le maillage utilisé pour le « cas1 »).

### 3.4 Etude de l'interaction entre le flambage et l'emprise

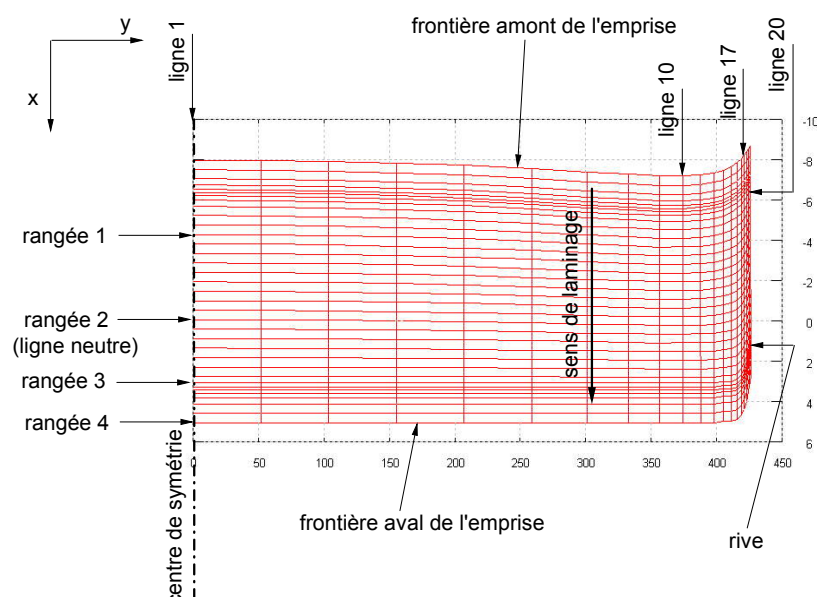
Une seconde observation des figures 3-9 et 3-10 suggère que la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  dans l'emprise, ainsi que les autres composantes de contrainte, ne sont pas modifiées par le flambage. Il en va de même pour les vitesses, en particulier pour la vitesse longitudinale  $V_x$ , comme le montre la figure 3-12. Des différences entre les résultats des calculs avec et sans flambage sont toutefois observables, quand on examine les profils des variables d'état suivant des lignes de rangées transversales<sup>8</sup> de nœuds du maillage, à des positions différentes le long de l'emprise. Ces différences sont néanmoins minimales, elles sont au plus de l'ordre de 0.1% pour  $V_x$  par exemple (cf. figure 3-14).

Le traitement du flambage n'est pas appliqué dans l'emprise, mais cette dernière pourrait être affectée par la réorganisation des contraintes que le flambage induit. Ce point important doit être analysé plus en détail, avec d'autres variables. Nous nous plaçons toujours dans le « cas 1 » (tableau 1 de l'annexe 4). Le profil d'épaisseur de la tôle (figure 3-15) n'est pas modifié quand le flambage est pris en compte. Également, l'effort de laminage et la pression de contact (colline de frottement), qui sont représentés respectivement dans les figures 3-16 et 3-17, ne montrent aucun effet du flambage. Enfin, pour les deux configurations (avec et sans flambage), les forces totales de laminage sont identiques. Ainsi, on conclut que malgré la modification de la distribution des contraintes hors emprise, y compris au voisinage immédiat de la sortie, aucune interaction emprise/flambage n'a été détectée dans ce cas.

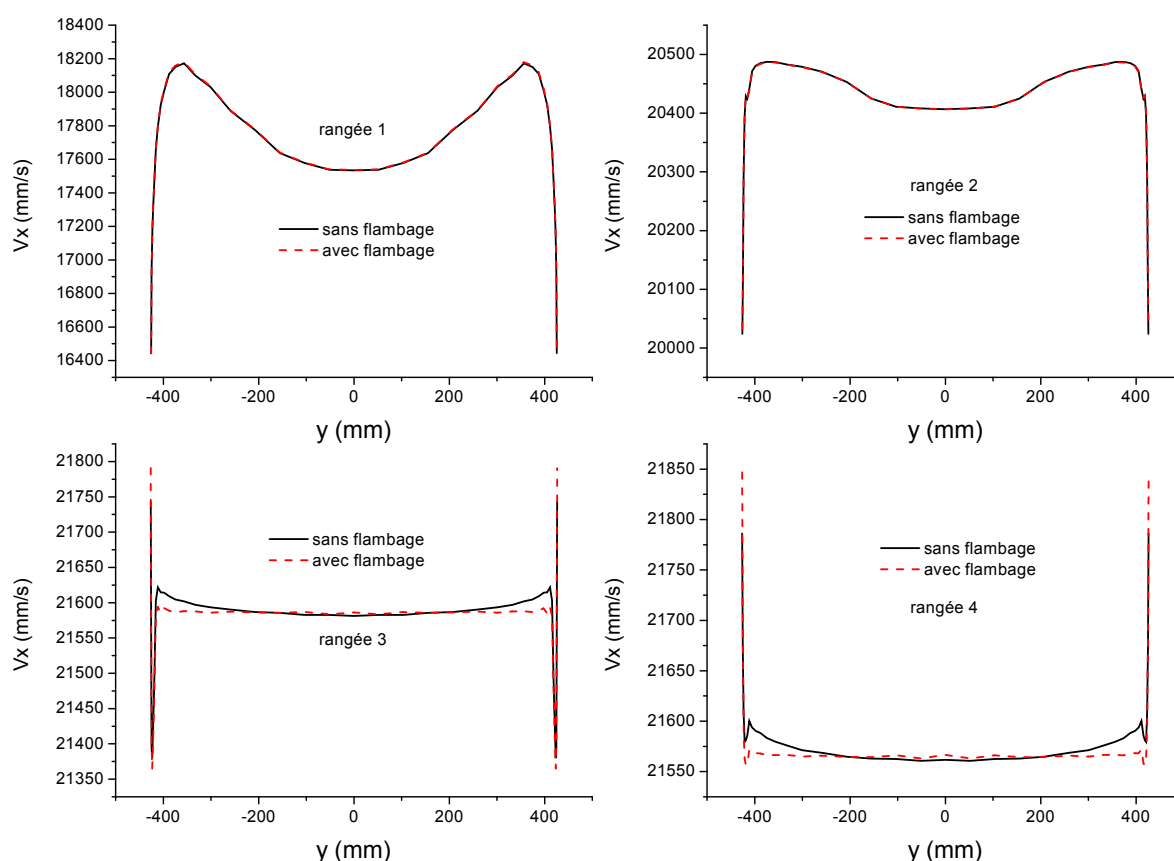


**Figure 3-12.** Évolution de la vitesse longitudinale  $V_x$  dans l'emprise le long de quelques lignes de courant (« cas 1 ») : les positions de ces lignes de courant sont données figure 3-13.

<sup>8</sup> Suivant les positions des nœuds contigus du maillage de la tôle, formant des alignements suivant la largeur (suivant  $y$ ).



**Figure 3-13. Vue de dessus (suivant l'axe  $z$ ) du maillage de la tôle dans l'emprise (« cas 1 »).**



**Figure 3-14. Profils de la vitesse longitudinale  $V_x$  suivant des rangées transversales des nœuds du maillage de la tôle à différentes positions le long de l'emprise (« cas 1 ») : les positions de ces rangées transversales de nœuds sont données figure 3-13.**

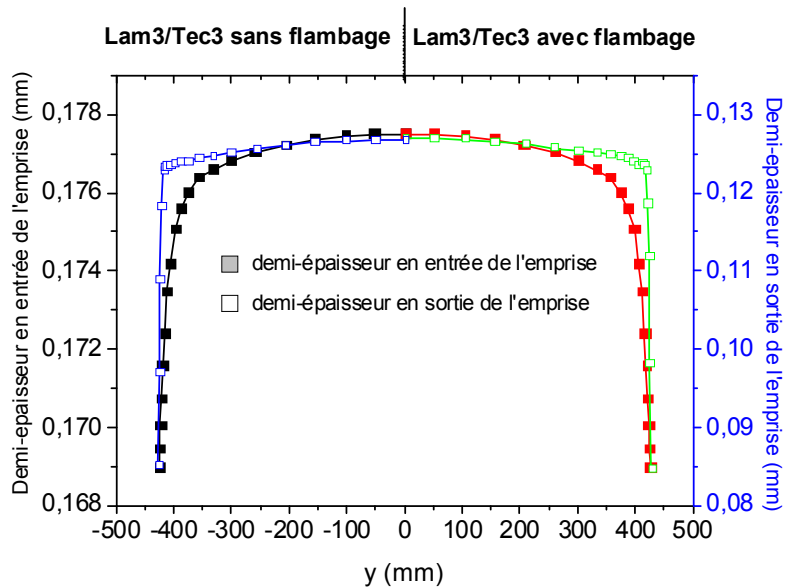
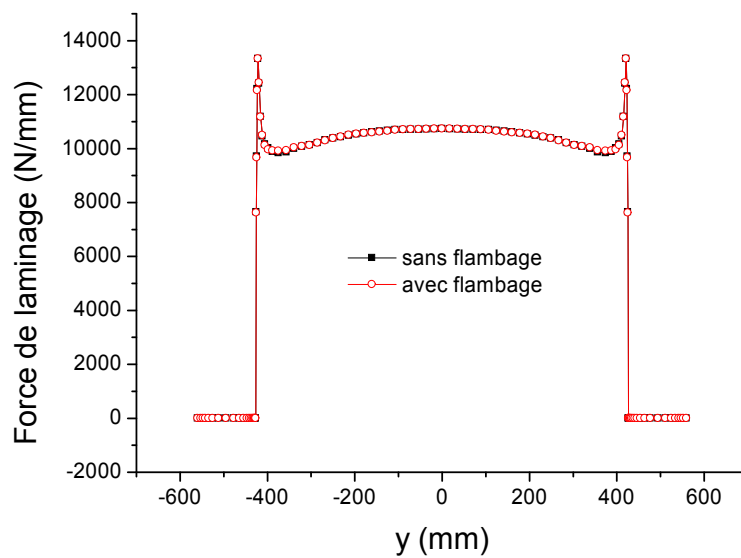


Figure 3-15. Profil d'épaisseur de la tôle en entrée et en sortie de l'emprise (« cas 1 »).

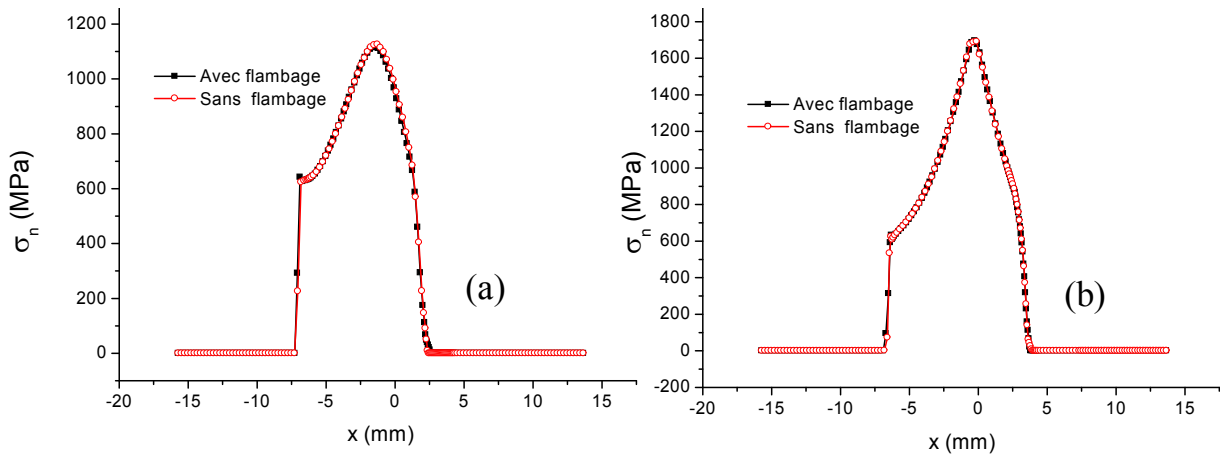


Force totale de laminage

Sans flambage :  $F_{\text{tot}} = 458550 \text{ N}$

Avec flambage :  $F_{\text{tot}} = 458870 \text{ N}$

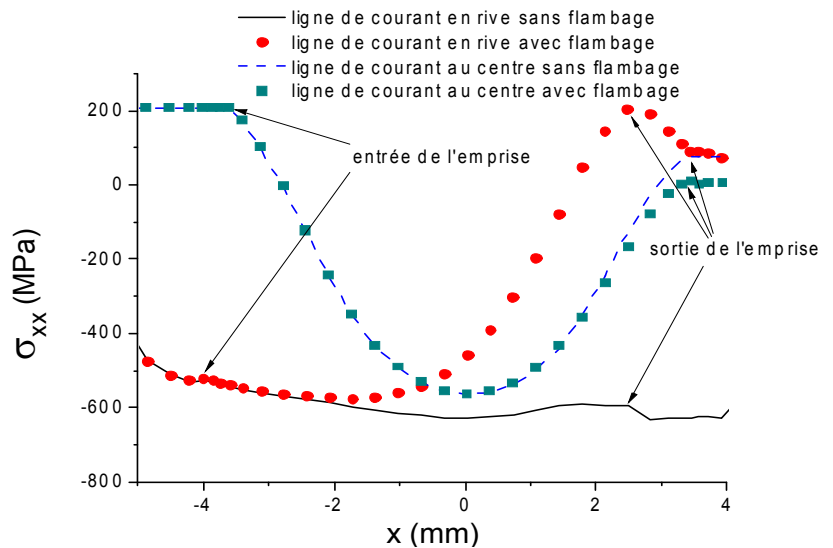
Figure 3-16. Répartition de l'effort de laminage par unité de longueur suivant la largeur de la tôle (« cas 1 »).



**Figure 3-17. Évolution de la contrainte normale de contact bande - cylindre le long de la ligne de courant au centre (a) et en rive (b) pour le « cas 1 ».**

Ce résultat n'est vrai qu'en première analyse, et plus ou moins suivant les cas. En effet, prenons un autre cas représenté dans le tableau 2 (annexe 4) ; ce « cas 2 » correspond à une très faible réduction – la déformation élastique est dominante, ou du moins très significative dans ce cas ; la tôle est aussi un peu plus large que dans le « cas 1 », la force de contre-flexion est plus grande. Les contraintes et les déformations dans l'emprise sont influencées par le flambage comme le montre la figure 3-18.

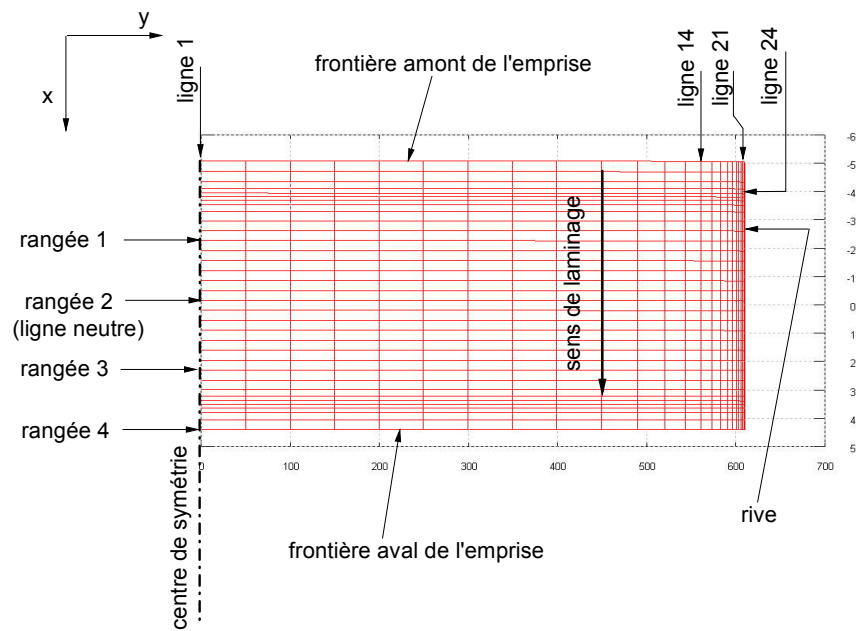
Pour ce cas, on enregistre un changement significatif du champ de vitesse dans l'emprise, particulièrement en sortie de cette dernière où le profil de la vitesse longitudinale  $V_x$  est complètement modifié (cf. figure 3-20 et 3-21) ; notons qu'il s'agit de variations de l'ordre du %, mais c'est l'ordre de grandeur de la déformation, donc du différentiel de vitesse aval - amont. Le champ de contraintes subit le même sort et le profil de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  loin en aval de l'emprise devient proche des mesures expérimentales – là où la mesure est possible (cf. figure 3-22). Par contre, l'effet de la prise en compte du flambage n'est pas aussi net sur la pression de contact pièce-cylindres, comme on le voit sur la figure 3-23. En effet, une modification a été apportée localement en rive (figure 3-23-a) sur la pression de contact, et donc sur la distribution transverse d'effort de laminage (cf. figure 3-24) ; ailleurs, les résultats sont quasi-inchangés. Cette petite modification paraît à première vue suffisante pour se répercuter sur la géométrie du contact et par suite sur le bombé tôle en sortie de l'emprise (cf. figure 3-25). Notons cependant que ces changements de profil sont bien inférieurs au  $\mu\text{m}$  !



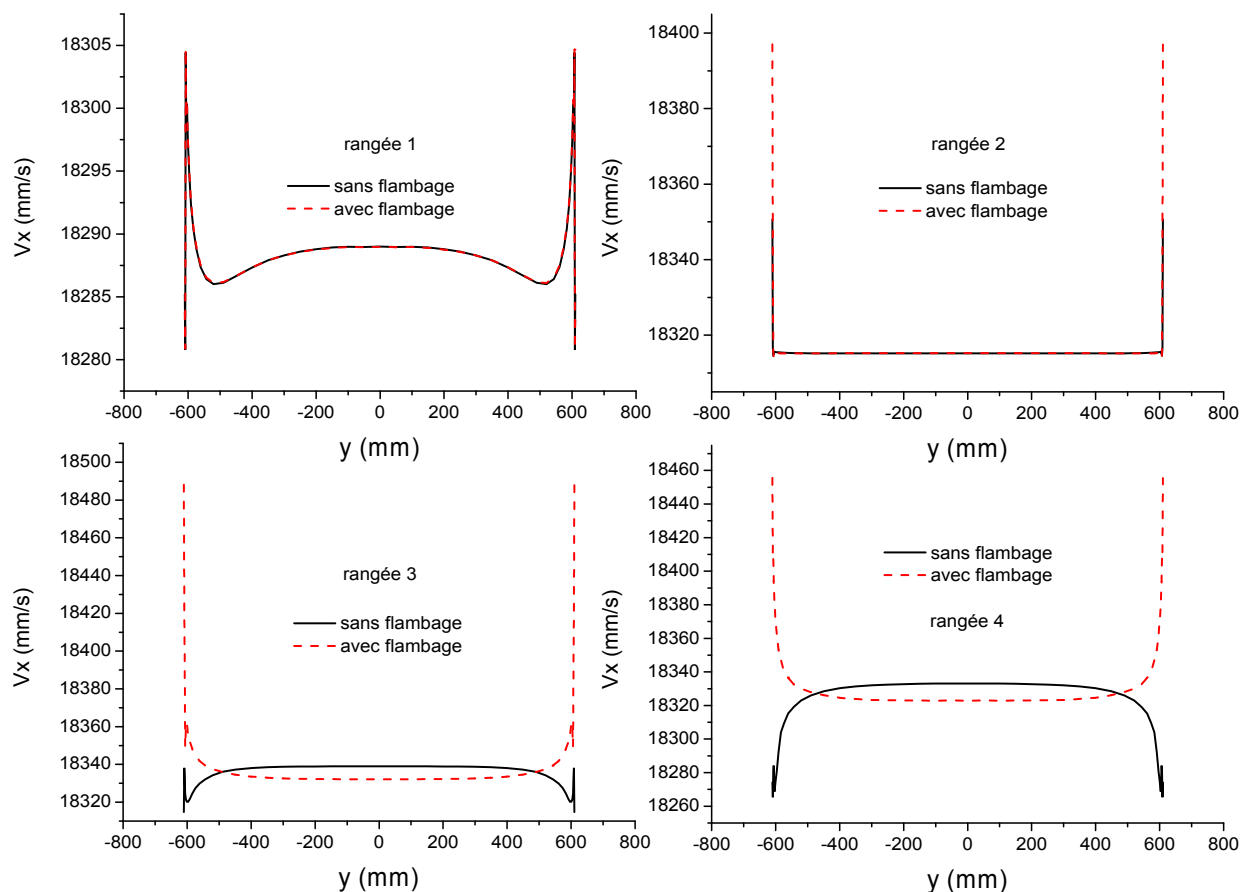
**Figure 3-18. Évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la ligne de courant en rive et au centre (« cas 2 ») : l'effet du flambage sur les contraintes dans l'emprise est plus important vers la rive qu'au centre.**

### Remarque 7 :

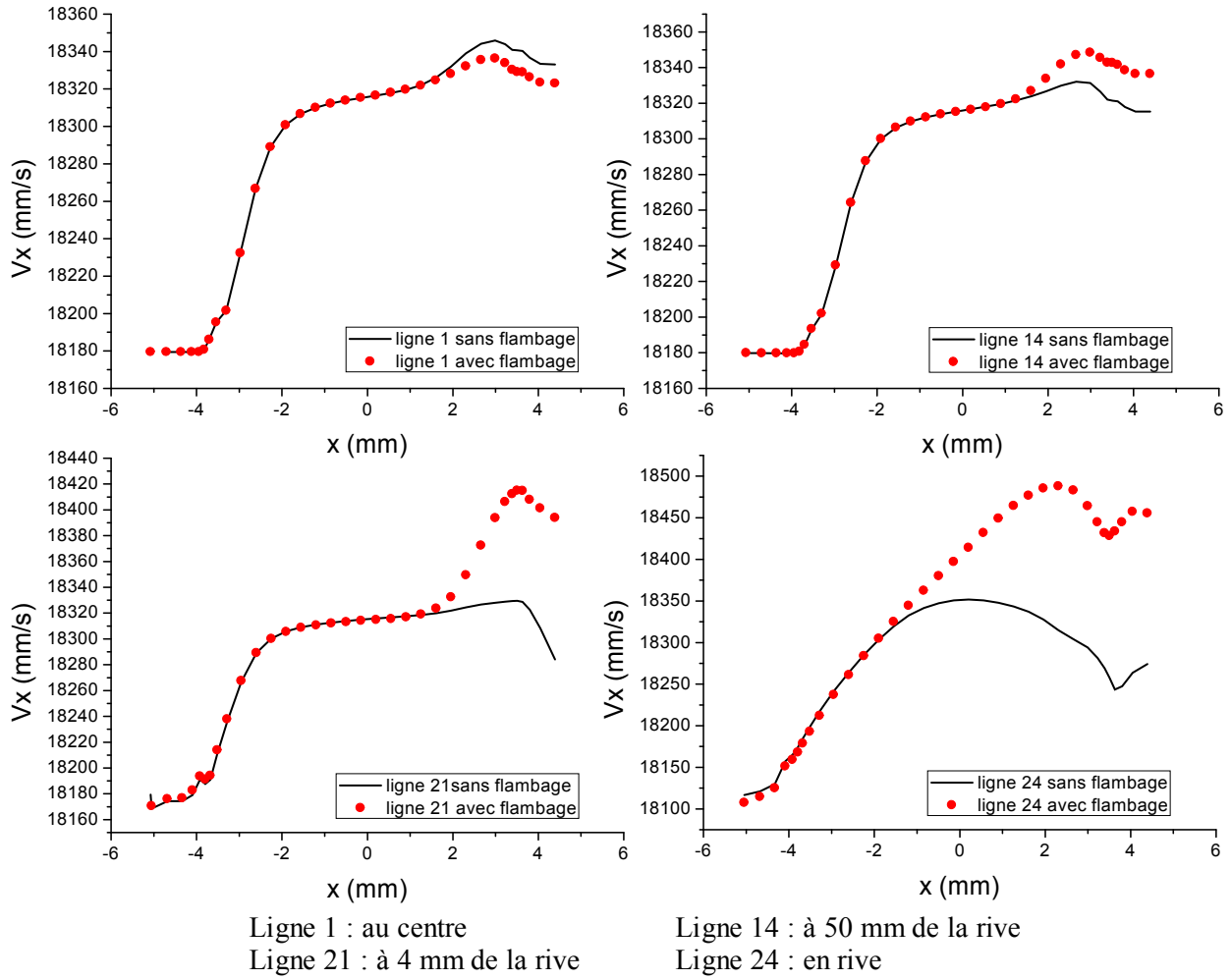
La figure 3-21 montre que les modifications du champ de vitesse dues à la prise en compte du flambage ne sont observées qu'à partir de la ligne neutre (cf. définition de la ligne neutre dans le paragraphe 1.3.8).



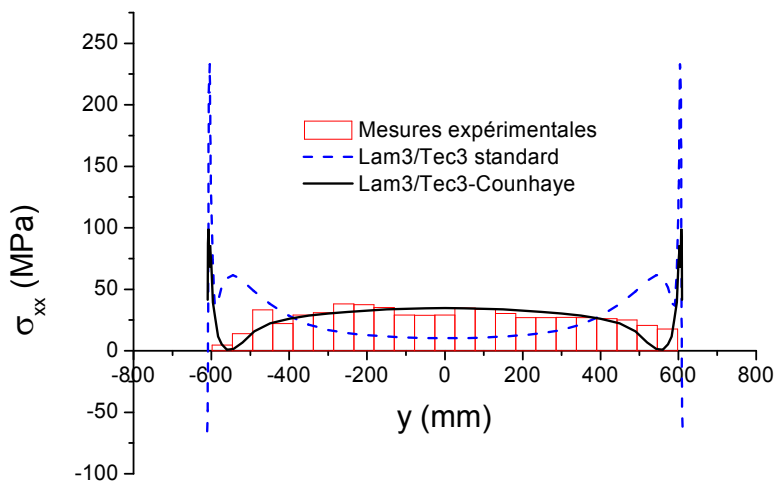
**Figure 3-19. Vue de dessus (suivant l'axe  $z$ ) du maillage de la tôle dans l'emprise (« cas 2 »).**



**Figure 3-20. Profils de la vitesse longitudinale  $V_x$  suivant des rangées transversales de nœuds du maillage de la tôle à différentes positions le long de l'emprise (« cas 2 ») : les positions de ces rangées transversales de nœuds sont données figure 3-19.**



**Figure 3-21. Évolution de la vitesse longitudinale  $V_x$  dans l'emprise le long de quelques lignes de courant (« cas 2 ») : les positions de ces lignes de courant sont données figure 3-19.**



**Figure 3-22. Profils transversaux de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage donnés par Lam3/Tec3 standard, Lam3/Tec3-Counhaye et les mesures expérimentales (« cas 2 »).**



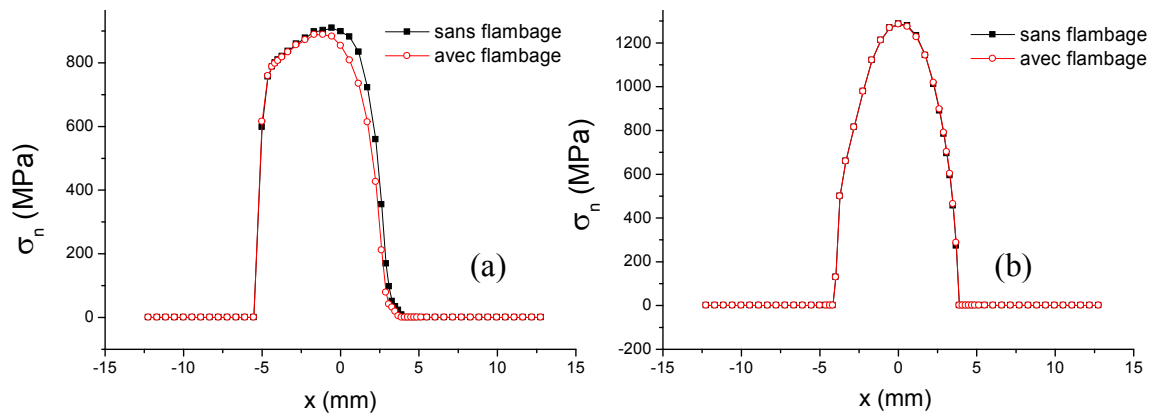


Figure 3-23. Évolution de la contrainte normale de contact bande - cylindre le long de la ligne de courant en rive (a) et au centre (b) pour le « cas 2 ».

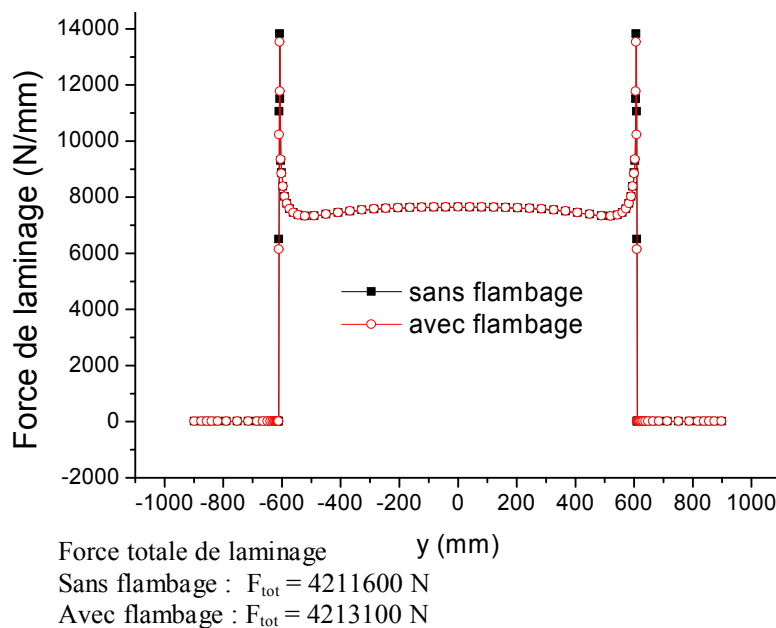


Figure 3-24. Répartition de l'effort de laminage par unité de largeur de la tôle (« cas 2 »).

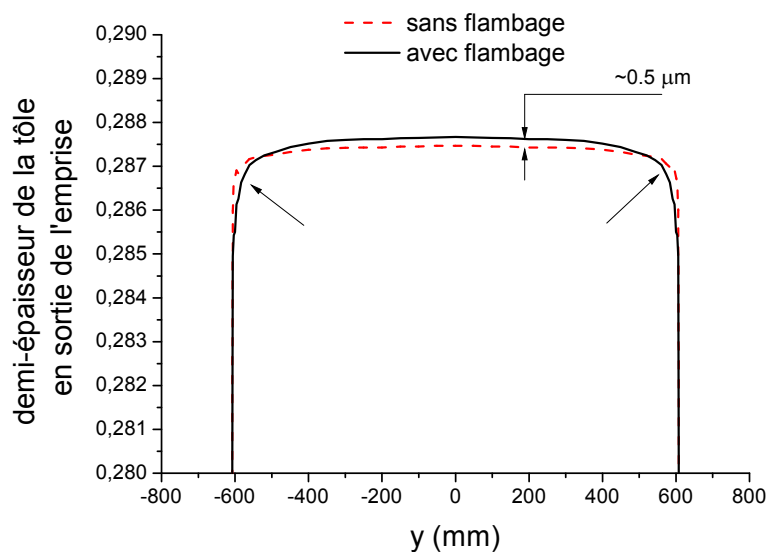


Figure 3-25. Profils d'épaisseur de la tôle en sortie de l'emprise (« cas 2 »).

### 3.5 Prédiction des défauts de planéité avec le modèle simplifié de flambage

La figure 3-26 montre les cartes de contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}(x,y)$  en aval de l'emprise. La transformation de cette contrainte par la prise en compte du flambage est clairement observable. Les défauts manifestes qui sont responsables de cette transformation sont illustrés par l'intermédiaire des déformations  $\lambda^f$  sur la figure 3-27 : un défaut en bords longs est visible ( $\lambda_I^f > 0$ ), l'angle  $\alpha$  est presque nul (donc  $I = x$ ). La composante  $\lambda_{II}^f$  est faible partout sauf en rive et sur une courte distance après l'emprise, à une orientation  $\alpha \approx 30^\circ$  (plis obliques). Toutefois, aucune donnée expérimentale n'est disponible pour confirmer ou infirmer ces détails.

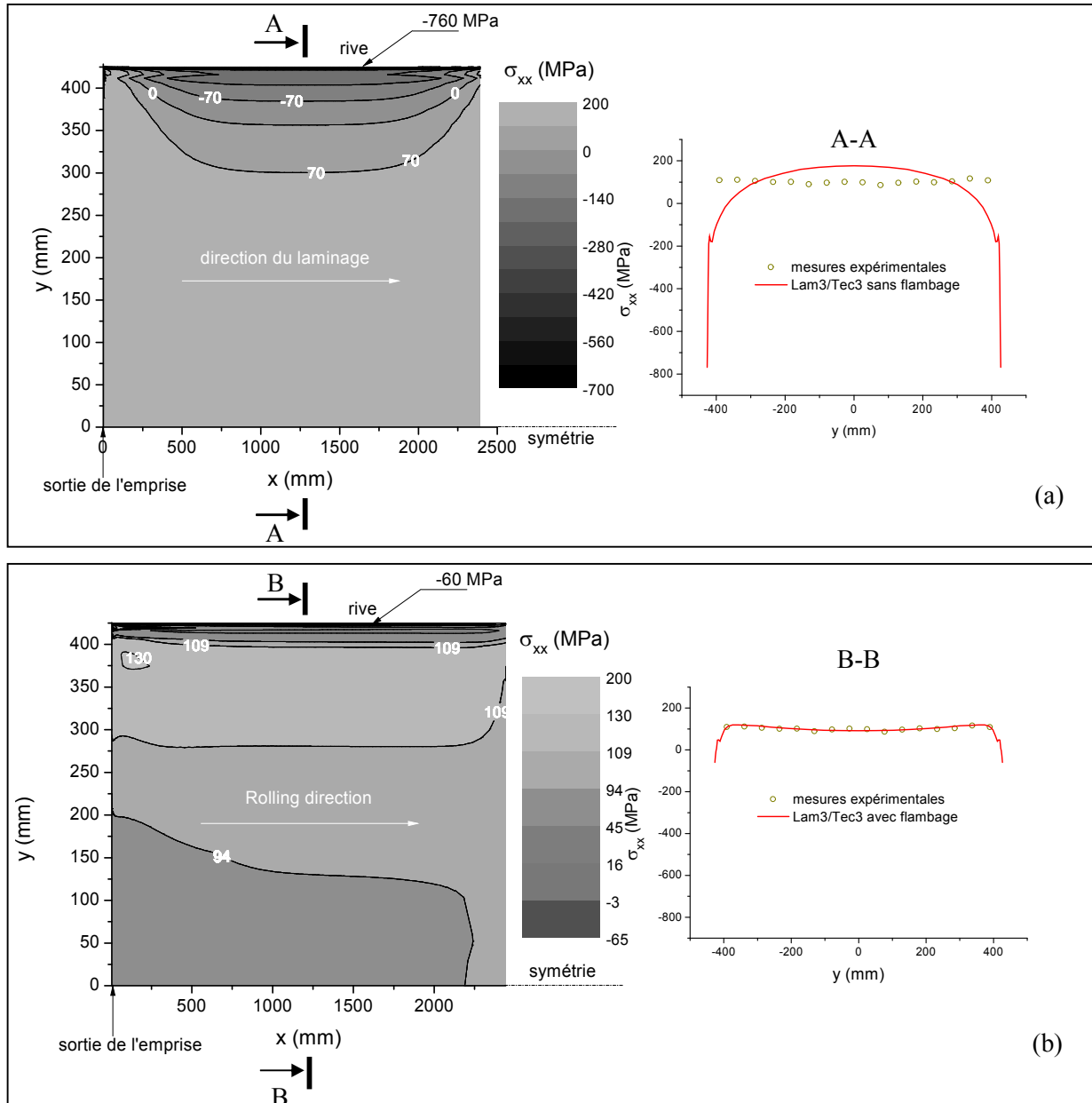


Figure 3-26. Cartes de contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  en aval de l'emprise sans (a) et avec (b) flambage (« cas 1 »).

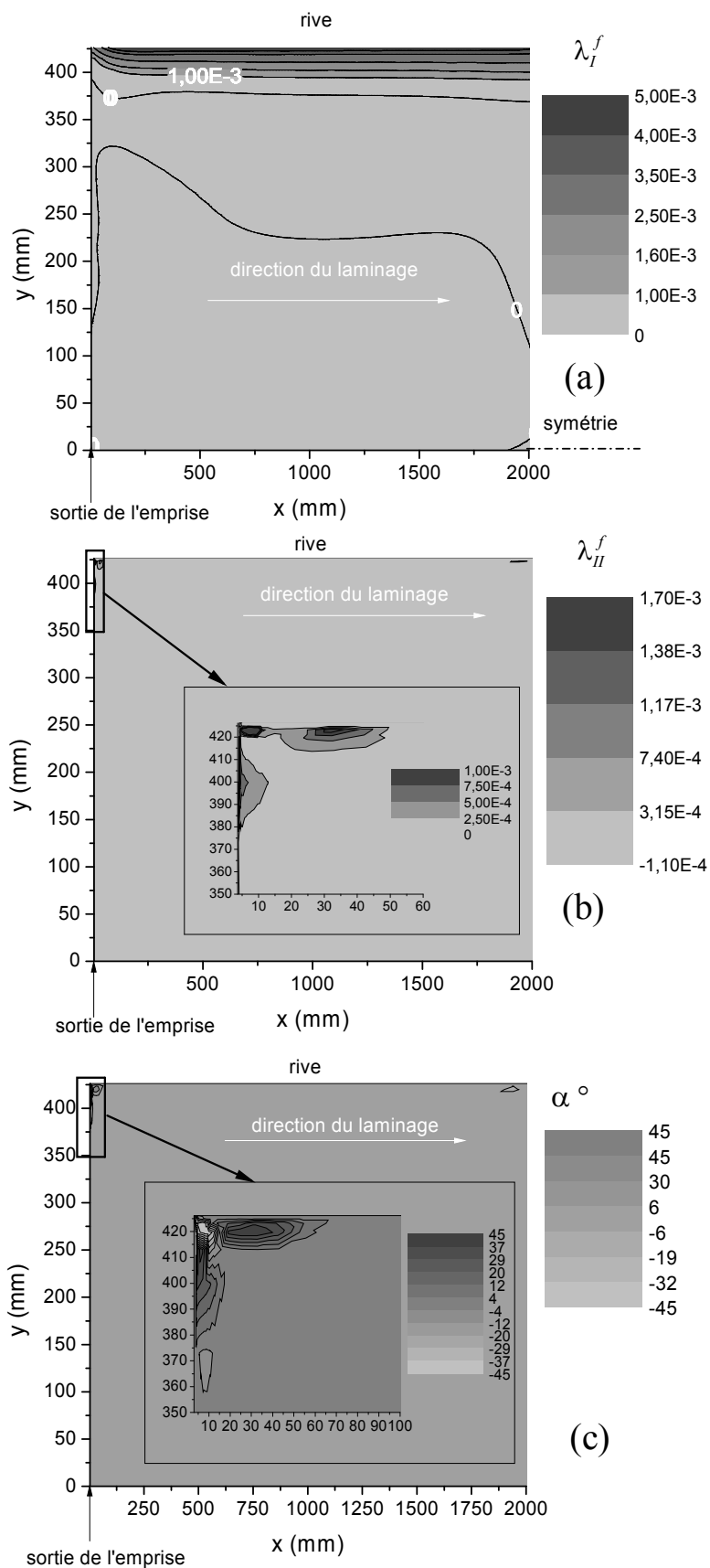


Figure 3-27. Défauts de planéité pour le « cas 1 ».

### 3.6 Conclusion

L'implémentation du critère de flambement simple de Counhaye a bien permis de retrouver la relaxation des contraintes et de retomber sur les profils expérimentaux à mi-intercage. Il a cependant été nécessaire d'introduire un amortissement dans la prise en compte du critère, sans quoi les variations trop brutales de déformation entraînent des difficultés sérieuses de convergence, et des oscillations des contraintes en rives.

Dans la zone de sortie d'emprise, notre implémentation ne respecte pas instantanément le critère, contrairement à celle de Counhaye [5] : elle retarde son application de quelques millimètres. Cette différence nous empêche de conclure nettement sur le lieu de naissance du flambement, juste en sortie d'emprise ou plus loin. Nous aurons donc recours à une modélisation bien plus puissante du flambement, détaillée dans les prochains chapitres.

Enfin, les deux cas traités ont montré une rétroaction faible, quoique non nulle, du flambement post-emprise sur l'état de l'emprise. Il conviendra donc dans le futur de vérifier sur un plus large ensemble de cas si oui ou non cette interaction est significative ; ou, si elle existe, de cerner le domaine où elle est forte et où une modélisation vraiment couplée de l'emprise et du flambement est nécessaire.

## CH.4 Un modèle EF de flambage de coques sous contraintes résiduelles

Dans une structure, la répartition des champs de contraintes résiduelles peut être plus ou moins hétérogène, et peut causer le flambage quand ces contraintes dépassent un certain niveau critique. Pour un milieu continu, ces contraintes résiduelles ont deux origines :

- thermique : un matériau est soumis à des variations de température sans avoir la possibilité de se dilater librement.
- Mécanique : un matériau subit une déformation plastique hétérogène.

Dans la plupart des procédés de mise en forme, notamment en laminage des tôles minces, le flambage est incontrôlable et peut avoir des effets néfastes sur la structure. De ce fait, ce phénomène doit être analysé afin de comprendre ses causes, pouvoir le modéliser et essayer de l'éviter.

On a dit précédemment qu'on ne trouve pas dans la littérature de modélisation de défauts de planéité en laminage prenant en compte le post-flambement. Les auteurs ayant travaillé sur la planéité [54,56-59, 67] se limitent à des calculs de flambage linéaire, c'est-à-dire uniquement à la recherche des modes propres de flambage. Cela permet seulement d'avoir une idée sur la forme des défauts en laminage, sans possibilité de les quantifier (en UI par exemple), ou de déterminer la forme de la structure après flambage sous contraintes résiduelles. Or dans certains cas, on a observé qu'une tôle peut passer d'un mode à un autre au cours du post-flambage.

On dispose d'un modèle éléments finis de flambage, basé sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN : cf. § 4.4) et une formulation coque [68], que l'on nommera « MAN ». Ce modèle est capable de simuler le flambage et le post-flambage des coques sous contraintes résiduelles. Des développements lui ont été apportés dans le présent travail, afin de l'adapter à la modélisation des défauts de planéité en laminage comme détaillé dans les chapitres 5 et 6.

Dans le présent chapitre, nous explicitons les bases théoriques et les formulations utilisées pour bâtir un modèle de flambage de coques sous contraintes résiduelles ayant une capacité de calcul du post-flambage. Nous validerons ce modèle par des applications simples, et nous l'utiliserons ensuite pour caractériser les défauts de planéité en laminage dans les chapitres qui suivent.

**Remarque 8 :**

Le modèle éléments finis de flambage introduit dans ce chapitre caractérise le flambage sous contraintes résiduelles quelle que soit leur origine : thermique ou mécanique. Cependant, pour la modélisation des défauts de planéité en laminage détaillée dans les chapitres suivants, on rappelle que les aspects thermiques en laminage seront négligés, sachant que Lam3/Tec3 est capable de les prendre en compte.

### 4.1 Description géométrique et cinématique de la coque utilisée

La cinématique de base utilisée dans le cadre de la présente formulation est simple ; elle repose sur les théories classiques des plaques et coques. La position d'un point quelconque de la géométrie décrite sur la figure 4-1 est repérée, sur la configuration initiale, par un vecteur  $\mathbf{x}$  exprimé sous la forme suivante :

$$\mathbf{x}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) + \theta_3 \mathbf{a}_3(\theta_1, \theta_2) \quad (4.1)$$

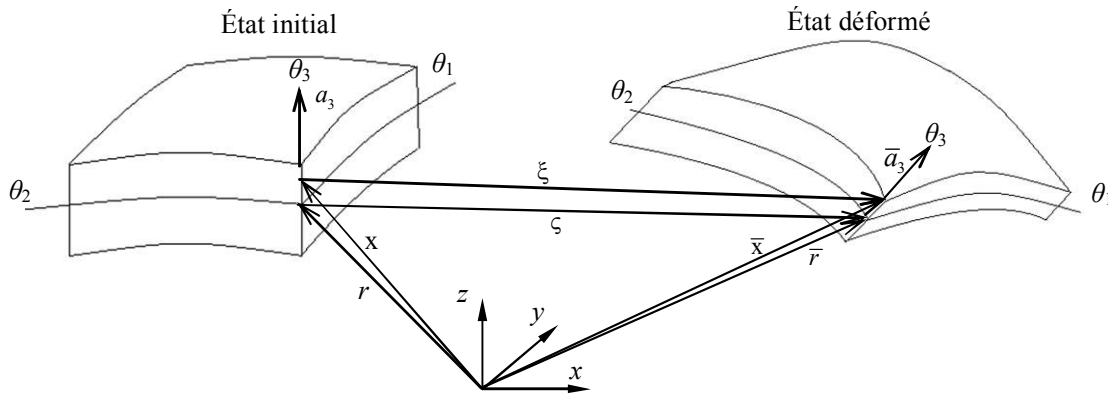


Figure 4-1. Description géométrique et cinématique de la coque [69].

où  $\mathbf{r}$  est un vecteur qui repère la position de la surface moyenne,  $\mathbf{a}_3$  est le vecteur directeur normal à la coque au point considéré et  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  désignent les coordonnées curvilignes convectives. En supposant une variation linéaire du champ de déplacement dans la direction de l'épaisseur, ce dernier peut s'écrire comme suit :

$$\xi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \zeta(\theta_1, \theta_2) + \theta_3 \omega(\theta_1, \theta_2) \quad (4.2)$$

où  $\zeta$  et  $\omega$  représentent respectivement le déplacement d'un point de la surface moyenne et la variation du vecteur directeur de la coque entre la configuration de référence et celle déformée. Nous pouvons définir le vecteur  $\bar{\mathbf{x}}$  de la configuration déformée par :

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{r} + \zeta) + \theta_3 (\mathbf{a}_3 + \omega) = \bar{\mathbf{r}} + \theta_3 \bar{\mathbf{a}}_3 \quad (4.3)$$

À partir de (4.2) et (4.3), nous pouvons déduire les composantes de la déformation  $\gamma^c$  de Green-Lagrange dans la base contravariante tel que :

$$\gamma_{ij}^c = \alpha_{ij} + \theta_3 \beta_{ij} + (\theta_3)^2 \mathcal{Q}_{ij} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{\partial x}{\partial \theta_3} ; \bar{a}_3 = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta_3} \\
 a_i &= r_{,i} ; \bar{a}_i = \bar{r}_{,i} \\
 \alpha_{ij} &= \frac{1}{2} (\bar{a}_i \bar{a}_j - a_i a_j) \\
 \beta_{ij} &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{3,i} \bar{a}_j + \bar{a}_{3,j} \bar{a}_i + a_{3,i} a_j + a_{3,j} a_i) \\
 \beta_{i3} &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{3,i} \bar{a}_3 + a_{3,i} a_3) \\
 \beta_{33} &= 0 \\
 Q_{ij} &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{3,i} \bar{a}_{3,j} - a_{3,i} a_{3,j}) \\
 Q_{i3} &= 0 \\
 Q_{33} &= 0
 \end{aligned}$$

On remarque que le terme  $\beta_{33}$  est nul à cause de l'hypothèse de la linéarité du déplacement dans la direction de l'épaisseur, ce qui peut engendrer le problème de verrouillage<sup>9</sup> dans certaines situations. Afin d'éviter ce problème, Büchter et al. [70] montrent que  $\gamma_{33}^c$  doit être au moins linéaire dans l'épaisseur, c'est-à-dire que  $\beta_{33}$  doit être au moins une constante non nulle dans la direction de l'épaisseur. De ce fait, on introduit dans la formulation une déformation supplémentaire non compatible  $\tilde{\gamma}$  au moyen du concept EAS (Enhanced Assumed Strain) proposé par Simo et Rifai [71] ; elle doit être orthogonale au champ de contraintes et indépendante du déplacement. Elle représente une variation linéaire de la déformation  $\gamma_{33}^c$  dans l'épaisseur, une des caractéristiques de l'élément coque proposé par Büchter et al. [70]. La définition de  $\tilde{\gamma}$  se traduit alors par (4.5) :

$$\begin{cases} \tilde{\gamma} = \gamma - \gamma^c \\ \int_{\Omega} (S^t : \tilde{\gamma}) d\Omega = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

## 4.2 Formulation variationnelle du modèle « MAN »

Le point de départ de cette formulation est la fonctionnelle de Hu-Washizu à trois champs qui sont le déplacement  $\zeta$ , la déformation  $\gamma$  et la contrainte  $S$ . Ces champs sont considérés a priori indépendants. Cela nous permet d'introduire l'enrichissement du champ de déformation à l'aide de  $\tilde{\gamma}$ . Nous utilisons en outre une loi de comportement linéaire, mais des lois non linéaires peuvent être introduites dans le cadre de cette formulation.

Deux types de chargements sont considérés pour modéliser les défauts de planéité en laminage des tôles : la traction de laminage et les contraintes résiduelles engendrées par l'hétérogénéité de la déformation plastique de la tôle dans l'emprise.

Ainsi, la stationnarité de la fonctionnelle de Hu-Washizu avec la prise en compte des relations (4.5) permet d'obtenir le système suivant :

<sup>9</sup> Le verrouillage de cisaillement apparaît dans les structures minces en flexion pure; il se traduit par une surestimation de l'énergie de cisaillement transverse lorsque la discrétisation ne permet pas de satisfaire les conditions cinématiques de Kirchhoff. Le verrouillage de membrane intervient dans ces structures si les effets de flexion et ceux de membrane ne sont pas découplés. Le verrouillage volumétrique, quant à lui, peut survenir lorsque le matériau est presque incompressible [72, 73 et 71].

$$\begin{cases}
 \int_{\Omega} S^t : \delta \gamma^c d\Omega = \lambda^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta \xi dS \\
 \int_{\Omega} S^t : \delta \tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\
 S = \mathbb{C} : (\gamma^c + \tilde{\gamma}) + \lambda^{(res)} S^{res} \\
 \gamma^c = \gamma^l(\xi) + \gamma^{nl}(\xi, \xi) \\
 \delta \gamma^c = \gamma^l(\delta \xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \delta \xi)
 \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $\lambda^{(tra)}$  et  $\lambda^{(res)}$  deux paramètres scalaires qui permettent de faire varier respectivement le niveau de chargement en traction ( $P$ ) et en contraintes résiduelles de référence ( $S^{res}$ ).

On admettra les numérotations suivantes des bords de la plaque auxquels des conditions aux limites sont imposées selon le cas traité. Pour les applications au laminage, le choix des conditions aux limites est détaillé plus loin (cf. chapitres 5 et 6).

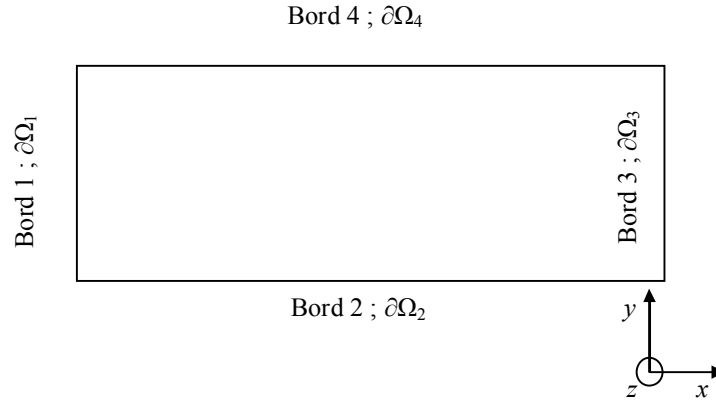


Figure 4-2. Géométrie et nomenclature des bords de la plaque.

Le modèle de flambage proposé sera utilisé en quatre étapes. À chacune de ces étapes correspond un type de chargement : traction appliquée sur le bord  $\partial\Omega_3$  ou contraintes résiduelles appliquées dans tout le volume de la bande. Dans ce qui suit, nous détaillerons chaque étape (cf. § 4.3) avec sa formulation en partant du système de base (4.6) (cf. § 4.4).

### 4.3 Les différentes étapes d'utilisation du modèle de flambage « MAN »

#### 4.3.1 Première étape (pré-tension : figure 4-3)

Dans la première étape, on met la bande sous tension : on applique une pression  $P$  uniformément répartie sur le bord 3. Cela permet de lui donner plus de rigidité et surtout d'approcher les conditions réelles de laminage (tension intercalage ou des enrouleurs). On considère le problème (4.6) sans les contraintes résiduelles ( $\lambda^{(res)} = 0$ ) et on fait varier  $\lambda^{(tra)}$  de zéro à une valeur  $\hat{\lambda}^{(tra)}$  définie par l'utilisateur et qui sera généralement fixée à un.



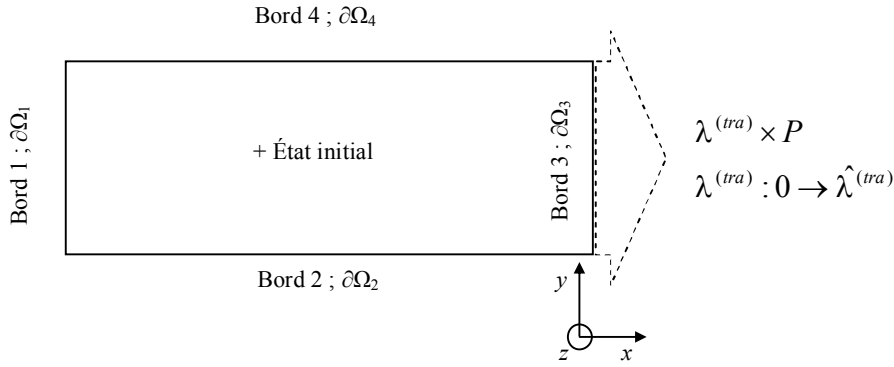


Figure 4-3. Étape 1 : Mise sous tension de la plaque.

#### 4.3.2 Deuxième étape (calcul de flambement : figure 4-4)

La deuxième étape consiste à chercher les modes de flambage de la bande sous contraintes résiduelles. On part de la solution de l'étape 1, c'est-à-dire avec la bande sous tension ( $\lambda^{(tra)} = \hat{\lambda}^{(tra)}$ ). En faisant varier  $\lambda^{(res)}$ , on cherche la première valeur critique de cette dernière à laquelle on observe le flambage de la bande. À cette valeur critique, qu'on note  $\lambda_c$ , correspond un mode de flambage.

La recherche de la charge critique de flambage est effectuée à l'aide d'un indicateur de bifurcation. En effet, on perturbe le problème fondamental (4.6) avec une force fictive, ce qui nous permet de construire un problème auxiliaire. L'intensité de la force de perturbation est appelée indicateur de bifurcation qui s'annule exactement aux points singuliers. Ainsi, la résolution du problème auxiliaire permet de déterminer la charge critique et le mode de flambage correspondant (cf. § 4.4.2).

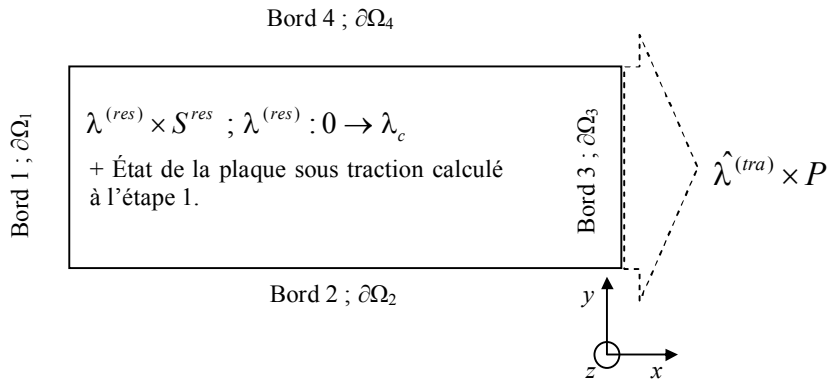
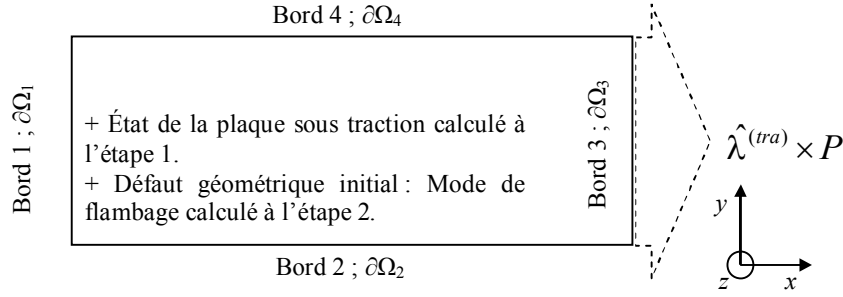


Figure 4-4. Étape 2 : Recherche de la charge critique de flambage et du mode correspondant.

#### 4.3.3 Troisième étape (calcul du post flambage : figure 4-5)

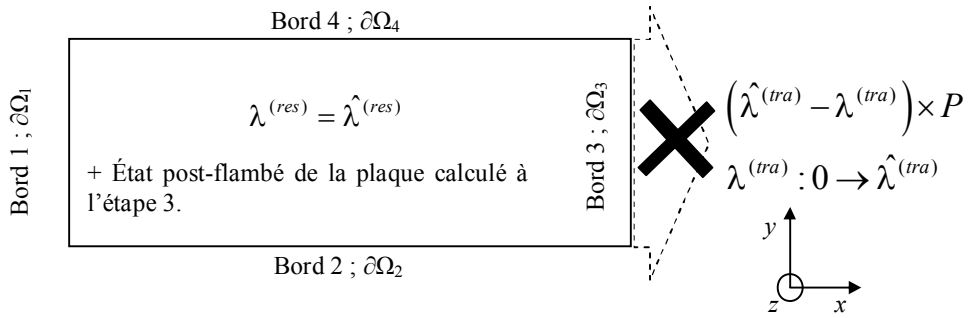
Dans la troisième étape, on effectue une étude de post-flambage de la plaque sous traction et sous contraintes résiduelles. On part de la solution de l'étape 1, correspondant à la mise sous tension ( $\lambda^{(tra)} = \hat{\lambda}^{(tra)}$ ), et on introduit une fraction du mode de flambage comme défaut géométrique initial dans le maillage de la bande. Ensuite, on calcule l'évolution de la déformée et des contraintes dans la structure par un suivi de courbe avec prise en compte de la non linéarité géométrique ;  $\lambda^{(res)}$  varie de zéro à  $\hat{\lambda}^{(res)}$ .



**Figure 4-5. Étape 3 : Calcul de l'état post-flambé de la plaque sous tension (suivi de courbe).**

#### 4.3.4 Quatrième étape (déchargement de la traction $P$ : figure 4-6)

L'étape 4 consiste à relâcher la traction appliquée dans la première étape à partir de l'état final de l'étape 3. Ici, on fait varier  $\lambda^{(tra)}$  de  $\hat{\lambda}^{(tra)}$  à zéro et  $\lambda^{(res)}$  est maintenue égale à  $\hat{\lambda}^{(res)}$ . L'objectif est de calculer les contraintes et l'état déformé de la plaque après le relâchement. Dans le cadre de la simulation du laminage, cela permet d'approcher l'état de la tôle après la découpe par exemple.



**Figure 4-6. Étape 4 : Calcul de l'état post-flambé de la plaque relâchée (suivi de courbe).**

### 4.4 Méthode asymptotique numérique pour la résolution du problème non linéaire

Pour un problème non linéaire quelconque ayant  $U$  comme inconnue et  $\lambda$  comme paramètre de chargement, la résolution à l'aide de la méthode asymptotique numérique consiste à développer  $U$  et  $\lambda$  en séries entières par rapport à un paramètre «  $a$  » :

$$\begin{aligned}
 U(a) &= U_0 + \sum_{i=1}^N a^i U_i \\
 \lambda(a) &= \lambda_0 + \sum_{i=1}^N a^i \lambda_i
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Pour notre problème, composé des quatre étapes détaillées précédemment (cf. 4.3), on possède deux paramètres de chargement :  $\lambda^{(tra)}$  et  $\lambda^{(res)}$ . Ces derniers ne varient pas en même temps, c'est-à-dire qu'un seul paramètre de chargement varie pendant une étape de calcul. À une étape donnée, c'est le paramètre de chargement variable qui est développé en série entière, tandis que l'autre est maintenu constant. Ainsi,  $\lambda^{(tra)}$  est développé en série dans la première et la quatrième

étapes correspondant respectivement à la mise en tension de la bande et à la phase de relâchement. Dans l'étape 1,  $\lambda^{(res)}$  est nul ce qui signifie que les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte ; à l'étape 4,  $\lambda^{(res)}$  est fixé à la valeur calculée en fin de l'étape 3 ( $\hat{\lambda}^{(res)}$ ). Dans les deuxième et troisième étapes, c'est  $\lambda^{(tra)}$  qui est maintenu constant à la valeur correspondante à la fin du calcul de l'étape 1 ( $\hat{\lambda}^{(tra)}$ ), par contre  $\lambda^{(res)}$  est développé en série entière pour la détection du point de bifurcation et pour le suivi des branches bifurquées. Ainsi, le paramètre  $\lambda$  du système (4.7) correspond à :

- $\lambda^{(tra)}$  dans les étapes 1 et 4 ;
- $\lambda^{(res)}$  dans les étapes 2 et 3.

Quant au vecteur  $U$ , il regroupe les trois variables ( $\xi, \tilde{\gamma}, S$ ).

En substituant les équations (4.7) dans le problème non linéaire (4.6) et en identifiant les termes à chaque ordre des séries, (4.6) se transforme en une suite de problèmes linéaires qui seront résolus à l'aide de la méthode des éléments finis [74]. Pour les quatre étapes de calcul, on détaille ci-dessous (§ 4.4.1 - 4.4.4) le développement asymptotique permettant d'obtenir cette suite de systèmes linéaires, qu'on peut écrire de la façon symbolique suivante :

à l'ordre 1 :

$$L_t(U_1) = \lambda_1 F \quad (4.8)$$

à l'ordre  $p$  ( $1 < p \leq N$ ) :

$$L_t(U_p) = \lambda_p F + F_p^{nl} \quad (4.9)$$

où  $L_t$  est l'opérateur tangent et  $F$  est un vecteur qui représente les efforts appliqués.

Le problème à l'ordre  $p$  fait intervenir un vecteur au second membre  $F_p^{nl}$  qui prend en compte les effets des non linéarités et qui dépend des solutions obtenues aux ordres précédents. Notons que tous les problèmes linéaires obtenus admettent le même opérateur tangent, ce qui permet de ne décomposer qu'une seule matrice pour la résolution de tous ces problèmes.

Pour la résolution des problèmes (4.8) et (4.9), on utilise la méthode des éléments finis et seuls le champ de déplacement  $\xi$  et la déformation additionnelle  $\tilde{\gamma}$  sont discrétisés. Pour ne garder que le champ de déplacement comme variable principale, une technique de condensation a été utilisée au niveau élémentaire donnant  $\tilde{\gamma}_p$  en fonction de  $\xi_p$ . Une fois le champ le déplacement calculé, toutes les autres variables sont mises à jour. Les détails de la discrétisation sont donnés par un exemple dans l'annexe 1 (discrétisation du problème de l'étape 3). La discrétisation de (4.8) et (4.9) donne :

à l'ordre 1 :

$$[K_T] \{\hat{\xi}_1\} = \lambda_1 \{F\} \quad (4.10)$$

à l'ordre  $p$  ( $1 < p \leq N$ ) :

$$[K_T] \{\hat{\xi}_p\} = \lambda_p \{F\} + \{F_p^{nl}\} \quad (4.11)$$

$[K_T]$  est la matrice de rigidité tangente.

**Remarque 9 :**

Le problème à l'ordre 1 est le problème tangent, exactement le même que celui obtenu dans une procédure itérative de type Newton - Raphson.

Afin de résoudre (4.10) et (4.11), il nous faut une relation supplémentaire qui définit le type de pilotage utilisé. De la même manière que pour les algorithmes itératifs classiques, on peut piloter les calculs en force, en déplacement ou encore en longueur d'arc imposée. Pour ce faire, on définit l'équation supplémentaire suivante :

$$a = \kappa_1 (\{\xi\} - \{\xi_0\})^t \{\xi_1\} + \kappa_2 (\lambda - \lambda_0) \lambda_1 \quad (4.12)$$

où  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont deux paramètres scalaires. Si  $\kappa_1 = 0$  et  $\kappa_2 \neq 0$ , on parlera d'un pilotage en force imposée ; si  $\kappa_1 \neq 0$  et  $\kappa_2 = 0$ , on parlera d'un pilotage en déplacement imposé et si  $\kappa_1 \neq 0$  et  $\kappa_2 \neq 0$ , on parlera alors d'un pilotage en longueur d'arc imposée. L'application de la technique de perturbation à l'équation (4.12) permet d'écrire :

à l'ordre 1 :

$$\kappa_1 \{\xi_1\}^t \{\xi_1\} + \kappa_2 \lambda_1^2 = 1 \quad (4.13)$$

à l'ordre  $p$  ( $1 < p \leq N$ ) :

$$\kappa_1 \{\xi_p\}^t \{\xi_1\} + \kappa_2 \lambda_p \lambda_1 = 0 \quad (4.14)$$

La résolution des problèmes (4.10)-(4.11) permet d'obtenir la branche solution en décomposant une seule matrice de rigidité tangente. Comme les séries ont un rayon de convergence limité, une technique de continuation est utilisée pour permettre d'obtenir toute la branche solution (cf. figure 4-7). Le rayon de validité  $a_{\max}$  de la solution polynomiale est calculé en exigeant que la différence relative entre les solutions à deux ordres consécutifs reste petite devant un paramètre  $\delta^{conv}$  choisi par l'utilisateur :

$$\frac{\|U^{(N)}(a_{\max}) - U^{(N-1)}(a_{\max})\|}{\|U^{(N)}(a_{\max}) - U_0\|} = \delta^{conv} \ll 1 \quad (4.15)$$

avec :

$$U^{(N)} = \sum_{i=0}^N a^i U_i \quad (4.16)$$

C'est ainsi qu'une technique de continuation efficace peut être obtenue permettant de calculer les longueurs de pas de façon complètement automatique et a posteriori, à partir des termes des séries déjà construites. Nous obtenons donc des pas adaptatifs en fonction des non linéarités locales de la branche solution.

La solution polynomiale peut être largement améliorée en utilisant les approximations de Padé. L'expérience sur plusieurs problèmes de mécanique montre que ces fractions rationnelles permettent de diviser le nombre de pas par deux comparé à la représentation en séries entières [75,76]. Une technique de prédiction - correction d'ordre élevé peut également être utilisée dans ce contexte. Cela permet d'obtenir des algorithmes plus robustes et peu coûteux en temps de calcul [77,78].

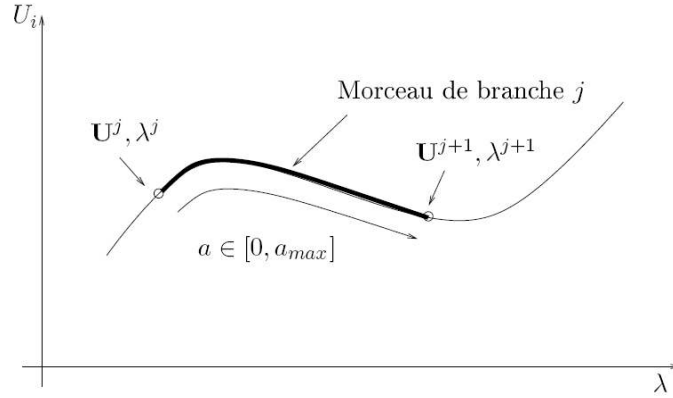


Figure 4-7. Schématisation du principe de la MAN [74].

Dans ce qui suit, on présente les détails sur les formulations et les développements asymptotiques des quatre étapes.

#### 4.4.1 Calcul du problème de traction : étape 1

Dans cette étape, le problème (4.6) se réduit au système suivant :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} S' : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \delta\xi)) d\Omega = \lambda^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS \\ \int_{\Omega} S' : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S = \mathbb{C} : (\gamma^l(\xi) + \gamma^{nl}(\xi, \xi) + \tilde{\gamma}) \end{cases} \quad (4.17)$$

Le développement en séries entières des variables  $U$  et  $\lambda^{(tra)}$  permet d'écrire la suite des systèmes linéaires comme suit :

à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} [S'_1 : (\gamma^l(\delta\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi_1))] d\Omega + \int_{\Omega} S'_0 : 2\gamma^{nl}(\xi_1, \delta\xi) d\Omega = \lambda_1^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS \\ \int_{\Omega} S'_1 : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S_1 = \mathbb{C} : (\gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) + \tilde{\gamma}_1) \end{cases} \quad (4.18)$$

Comme seules les variables  $\xi$  et  $\tilde{\gamma}$  sont discrétisées, nous condons la troisième équation du système (4.18) (relation de comportement) dans les deux premières équations du même système. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ \left( \gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) + \tilde{\gamma}_1 \right)^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_1, \delta\xi) d\Omega = \lambda_1^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS \\ \int_{\Omega} \left( \gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) + \tilde{\gamma}_1 \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

à l'ordre  $p \geq 2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ S_p^t : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega \\ \quad = \lambda_p^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^t : 2\gamma^{nl}(\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega \\ \int_{\Omega} S_p^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S_p = \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) + \tilde{\gamma}_p + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right) \end{array} \right. \quad (4.20)$$

De même que pour l'ordre 1, l'écriture condensée du système (4.20) est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) + \tilde{\gamma}_p \right)^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega \\ \quad = \lambda_p^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS - \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{p-1} \left( \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right)^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega \\ \quad \quad \quad - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^t : 2\gamma^{nl}(\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega \\ \int_{\Omega} \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) + \tilde{\gamma}_p \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{p-1} \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega \end{array} \right. \quad (4.21)$$

#### 4.4.2 Calcul de la charge critique et du mode de flambage : étape 2

Dans cette section est présenté un indicateur de bifurcation adapté à la méthode asymptotique numérique [79,80]. Cela consiste à perturber le problème fondamental (4.6) par une force fictive  $\Delta\mu f_{\mu}$  qui provoque une variation du déplacement, des contraintes ainsi que la déformation additionnelle  $\tilde{\gamma}$ . On note ces variations respectivement par  $\Delta\xi$ ,  $\Delta S$ ,  $\Delta\tilde{\gamma}$ .

Dans l'annexe 2 on montre que cette perturbation engendre le problème auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} S^t : 2\gamma^{nl}(\Delta\xi, \delta\xi) d\Omega + \int_{\Omega} \Delta S^t : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \delta\xi) \right) d\Omega = \Delta\mu \int_{\partial\Omega} f_{\mu} \delta\xi dS \\ \int_{\Omega} \Delta S^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ \Delta S = \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\Delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \Delta\xi) + \Delta\tilde{\gamma} \right) \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Afin de résoudre (4.22) avec la MAN, nous développons les nouvelles variables  $(\Delta\xi, \Delta\tilde{\gamma}, \Delta S)$  et le paramètre  $\Delta\mu$  sous forme de séries entières pour obtenir la suite de systèmes auxiliaires suivante :

à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\Delta\xi_0, \delta\xi) d\Omega + \int_{\Omega} \Delta S_0^t : \mathbb{C} : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) d\Omega = \Delta\mu_0 \int_{\partial\Omega} f_{\mu} \delta\xi dS \\ \int_{\Omega} \Delta S_0^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ \Delta S_0 = \mathbb{C} : (\gamma^l(\Delta\xi_0) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \Delta\xi_0) + \Delta\tilde{\gamma}_0) \end{cases} \quad (4.23)$$

à l'ordre  $p \geq 1$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} S_p^t : 2\gamma^{nl}(\Delta\xi_0, \delta\xi) d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^t : 2\gamma^{nl}(\Delta\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega + \int_{\Omega} \Delta S_p^t : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \Delta S_p^t : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) d\Omega + \int_{\Omega} \Delta S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} \Delta S_i^t : 2\gamma^{nl}(\Delta\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \Delta\mu_p f_{\mu} \delta\xi dS \\ \int_{\Omega} \Delta S_p^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ \Delta S_p = \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\Delta\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \Delta\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_p, \Delta\xi_0) + \sum_{i=1}^{p-1} (2\gamma^{nl}(\xi_i, \Delta\xi_{p-i})) + \Delta\tilde{\gamma}_p \right) \end{cases} \quad (4.24)$$

On peut adopter les écritures symboliques suivantes des systèmes (4.23)-(4.24) :

à l'ordre 0 :

$$L_t^0(\Delta U_0) = \Delta\mu_0 F_{\mu} \quad (4.25)$$

à l'ordre  $p \geq 1$  :

$$L_t^0(\Delta U_p) = \Delta\mu_p F_{\mu} + F_p^{nl} \quad (4.26)$$

$L_t^0(\cdot)$  est l'opérateur tangent, le même qui sert au calcul de la branche fondamentale.

Pour résoudre le problème auxiliaire, on a besoin d'une condition supplémentaire :

- pour l'ordre 0, on choisit  $\Delta\mu_0 = 1$  ; ce qui permet d'obtenir  $\Delta U_0 = (\Delta\xi_0, \Delta S_0, \Delta\tilde{\gamma}_0)$
- Pour les autres ordres ( $p \geq 1$ ), on choisit la condition d'orthogonalité suivante :

$$\langle L_t^0(\Delta U - \Delta U_0), \Delta U_0 \rangle = 0 \quad (4.27)$$

Cela nous permet de calculer les termes  $\Delta U_i$  et  $\Delta \mu_i$ . D'autre part, si dans un pas MAN de longueur «  $a_{\max}$  », un point singulier existe, on cherche la valeur de «  $a$  » comprise entre zéro et «  $a_{\max}$  », pour laquelle  $\Delta \mu$  s'annule. Enfin, le mode de flambage est défini par  $\Delta U = \Delta U(a_c)$ . Pour un exemple donné sur la figure 4-8, on montre l'évolution de l'indicateur de bifurcation  $\Delta \mu$  sur un pas MAN ; ainsi, on peut obtenir la valeur de  $a_c$ .

Les avantages de cette technique utilisant l'indicateur de bifurcation sont les suivants :

- Le coût de calcul est réduit, puisque dans le calcul de l'indicateur de bifurcation on utilise le même opérateur tangent  $L_t^0$  qui a servi pour le calcul de la branche fondamentale ; seuls des seconds membres sont calculés.
- Cet indicateur est très bien adapté aux problèmes où le pré-flambage est non linéaire.
- Le problème auxiliaire permet d'obtenir à la fois le point singulier et le mode correspondant.

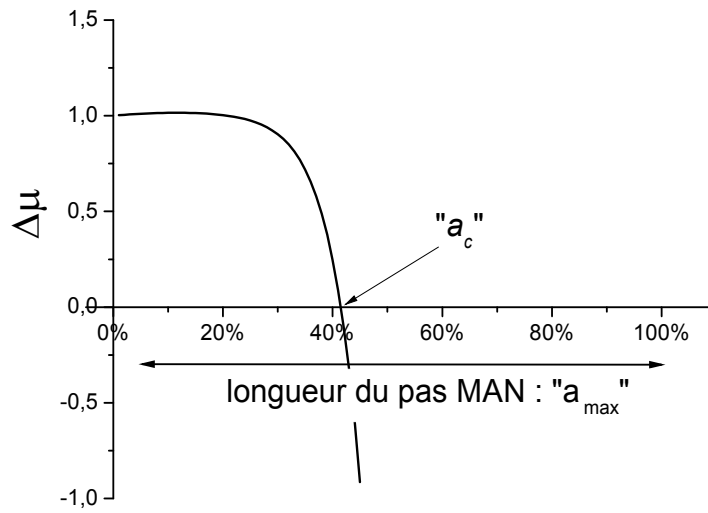


Figure 4-8. Détection du point singulier à l'aide de l'indicateur de bifurcation.

#### 4.4.3 Calcul du post-flambage sous contraintes résiduelles : étape 3

Dans cette étape, on reprend le calcul à partir de la fin de l'étape 1. Il s'agit d'effectuer un suivi de courbe en non linéarité géométrique, en prenant en compte un défaut géométrique correspondant à une fraction du mode de flambage calculé à l'étape 2.

Le problème (4.6) s'écrit pour cette étape :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} S' : (\gamma^l(\delta \xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \delta \xi)) d\Omega = \hat{\lambda}^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta \xi dS \\ \int_{\Omega} S' : \delta \tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S = \mathbb{C} : (\gamma^l(\xi) + \gamma^{nl}(\xi, \xi) + \tilde{\gamma}) + \lambda^{(res)} \int_{\partial\Omega} (S^{res})^l : \delta \tilde{\gamma} d\Omega \end{array} \right. \quad (4.28)$$

$\hat{\lambda}^{(tra)}$  est fixée, et correspond à la valeur calculée de  $\lambda^{(tra)}$  en fin du calcul de l'étape 1.



Les variables sont développées en séries entières, de façon à obtenir la suite de problèmes linéaires suivante :

à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left[ S_0^t : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) \right] d\Omega = \hat{\lambda}^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS \\ \int_{\Omega} S_0^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S_0 = \mathbb{C} : (\gamma^l(\xi_0) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_0) + \tilde{\gamma}_0) + \lambda_0^{(res)} S^{(res)} \end{cases} \quad (4.29)$$

La solution de ce système est celle obtenue à la fin de l'étape 1. Toutefois, on l'écrit pour faire apparaître la traction  $P$  dans la formulation de cette étape :

à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left[ S_1^t : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta\xi)) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_1, \delta\xi) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} S_1^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S_1 = \mathbb{C} : (\gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) + \tilde{\gamma}_1) + \lambda_1^{(res)} S^{res} \end{cases} \quad (4.30)$$

à l'ordre  $p \geq 2$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left[ S_p^t : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^t : 2\gamma^{nl}(\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega \\ \int_{\Omega} S_p^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S_p = \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) + \tilde{\gamma}_p + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right) + \lambda_p^{(res)} S^{(res)} \end{cases} \quad (4.31)$$

Comme pour l'étape 1, on peut condenser ces systèmes (4.30)-(4.31) pour obtenir :

à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \bullet \int_{\Omega} \left[ (\gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1))^t : \mathbb{C} : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) \right] d\Omega \\ + \int_{\Omega} \tilde{\gamma}_1 : \mathbb{C} : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_1, \delta\xi) d\Omega = \\ - \lambda_1^{(res)} \int_{\Omega} (S^{res})^t : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) d\Omega \\ \bullet \int_{\Omega} (\gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1))^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\gamma}_1^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = - \lambda_1^{(res)} \int_{\Omega} (S^{res})^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega \end{cases} \quad (4.32)$$

à l'ordre  $p \geq 2$  :

$$\left\{ \begin{aligned} & \bullet \int_{\Omega} \left[ \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) \right)^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega + \\ & \quad \int_{\Omega} \left[ \tilde{\gamma}_p^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega = \\ & \quad - \underbrace{\lambda_p^{(res)} \int_{\Omega} \left( S^{res} \right)^t : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) d\Omega}_{*} - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^t : 2\gamma^{nl}(\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega \\ & \quad - \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{p-1} \left( \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right)^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega \\ & \bullet \int_{\Omega} \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} \tilde{\gamma}_p^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{p-1} \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega - \underbrace{\lambda_p^{(res)} \int_{\Omega} \left( S^{res} \right)^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega}_{**} \end{aligned} \right. \quad (4.33)$$

#### Remarque 10 :

La seule différence entre la formulation de l'étape 1 et celle de l'étape 3 est le chargement, ce qui se traduit par l'apparition des deux termes (\*) et (\*\*) du second membre dans le système (4.33).

#### 4.4.4 Calcul du relâchement : étape 4

Dans cette étape, on part du résultat de l'étape 3 et on relâche la traction qui a été appliquée dans l'étape 1. La formulation du présent problème est gouvernée par le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} S^t : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \delta\xi) \right) d\Omega = \lambda^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS \\ & \int_{\Omega} S^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ & S = \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + \gamma^{nl}(\xi, \delta\xi) + \tilde{\gamma} \right) + \hat{\lambda}^{(res)} S^{(res)} \end{aligned} \right. \quad (4.34)$$

$\hat{\lambda}^{(tra)}$  et  $\hat{\lambda}^{(res)}$  sont les valeurs de  $\lambda^{(tra)}$  et  $\lambda^{(res)}$  atteintes respectivement à la fin des étapes 1 et 3. Pour relâcher la traction  $P$ , on fait varier  $\lambda^{(tra)}$  de  $\hat{\lambda}^{(tra)}$  à 0 et on maintient  $\lambda^{(res)}$  égale à  $\hat{\lambda}^{(res)}$ . Le développement asymptotique en séries entières permet d'écrire les systèmes pour chaque ordre. A l'ordre 0, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ S_0^t : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega = \hat{\lambda}^{(res)} \int_{\partial\Omega} \left( S^{res} \right)^t : \delta\gamma d\Omega + \hat{\lambda}^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS \\ & \int_{\Omega} S_0^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = - \hat{\lambda}^{(res)} \int_{\partial\Omega} \left( S^{res} \right)^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega \end{aligned} \right. \quad (4.35)$$

Ce système est déjà résolu à la fin de l'étape 3. On l'écrit dans le but de faire apparaître le terme en contraintes résiduelles ( $S^{res}$ ) dans la formulation de cette étape.

Pour les ordres supérieurs ( $p \geq 1$ ), les systèmes s'écrivent exactement comme pour l'étape 1 :

à l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ S_1^t : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_1, \delta\xi) d\Omega = \lambda_1^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P\delta\xi dS \\ \int_{\Omega} S_1^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S_1 = \mathbb{C} : (\gamma^l(\xi_1) + \gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) + \tilde{\gamma}_1) \end{array} \right. \quad (4.36)$$

à l'ordre  $p \geq 2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ S_p^t : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega \\ \quad = \lambda_p^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P\delta\xi dS - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^t : 2\gamma^{nl}(\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega \\ \int_{\Omega} S_p^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ S_p = \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) + \tilde{\gamma}_p + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right) \end{array} \right. \quad (4.37)$$

On peut les écrire sous les formes condensées suivantes :

à l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ (\gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) + \tilde{\gamma}_1)^t : \mathbb{C} : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) \right] d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_1, \delta\xi) d\Omega = \lambda_1^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P\delta\xi dS \\ \int_{\Omega} (\gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) + \tilde{\gamma}_1)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (4.38)$$

à l'ordre  $p \geq 2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left[ (\gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) + \tilde{\gamma}_p)^t : \mathbb{C} : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega \\ \quad = \lambda_p^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P\delta\xi dS - \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{p-1} (\gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}))^t : \mathbb{C} : (\gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi)) \right] d\Omega \\ \quad \quad - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^t : 2\gamma^{nl}(\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega \\ \int_{\Omega} (\gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) + \tilde{\gamma}_p)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{p-1} \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega \end{array} \right. \quad (4.39)$$

## 4.5 Applications et validations

### 4.5.1 Plaque sous contrainte résiduelle longitudinale homogène

Des tests de validation ont été effectués en comparant les résultats du modèle « MAN » avec des applications dont les solutions analytiques sont connues, données par Timoshenko [61].

Soit une plaque en appuis simples sur les deux extrémités, et soumise à une distribution de contrainte résiduelle homogène de référence, dont seule la composante longitudinale est non nulle :

$$\sigma_{xx}^{ref} [\text{MPa}] = -\left(\frac{\pi h}{b}\right)^2 \frac{E}{12(1-\nu^2)}. \text{ La plaque est de}$$

longueur  $l$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h = 1 \text{ mm}$ . Elle est constituée d'un matériau dont les constantes d'élasticité sont données par le module de Young  $E = 200 \text{ GPa}$  et le coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ . Deux configurations ont été examinées comme exposé sur la figure 4-9 : plaque à bords libres et plaque à bords en appuis simples. On supposera la symétrie par rapport au plan  $(x,y)$  en  $y=0$ , pour ne modéliser que la moitié de la structure.

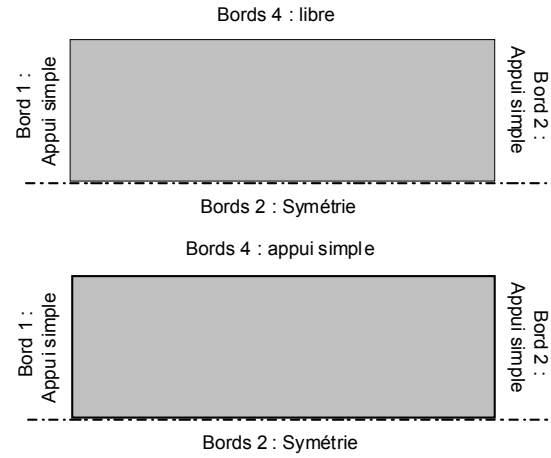


Figure 4-9. Les deux configurations utilisées pour les tests de validation.

En faisant varier le rapport «  $l/b$  », la figure 4-10 montre qu'on obtient une très bonne coïncidence entre les valeurs de la charge critique  $\lambda_c$  issues de notre modèle et celles données par les calculs analytiques.

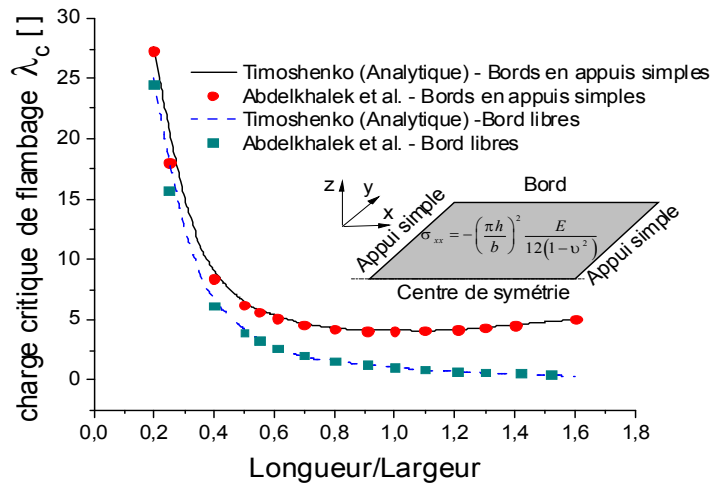
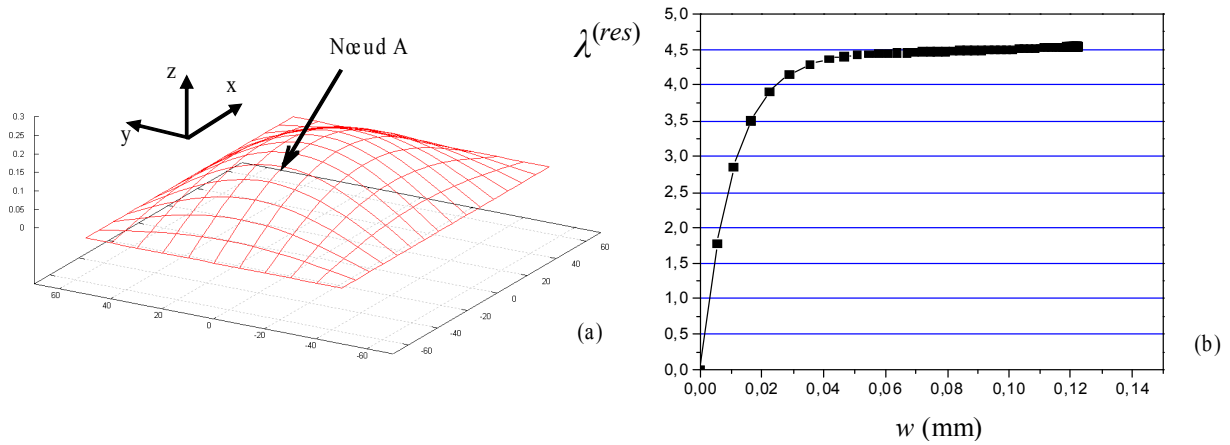


Figure 4-10. Évolution de la charge critique de flambage  $\lambda_c$  en fonction du rapport longueur/largeur de la plaque, pour un champ de contrainte de référence en compression homogène et unidirectionnel. Ici, des appuis simples sont considérés sur les deux extrémités de la bande.

La figure 4-11 montre l'état post-flambé de la plaque ainsi que l'évolution du paramètre du chargement  $\lambda^{(res)}$  en fonction du déplacement hors plan du nœud « A » indiqué sur la même figure. En examinant cette évolution, on observe que  $\lambda^{(res)}$  se sature à la charge critique  $\lambda_c$  (ici  $\lambda_c = 4.46$  qui correspond à la valeur analytiquement obtenue par Timoshenko [61]).

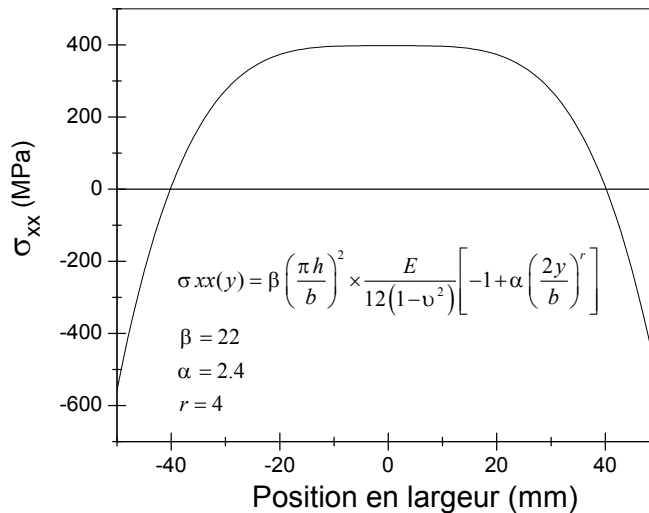


#### 4.5.2 Plaque sous contrainte résiduelle longitudinale hétérogène dans la largeur

##### 4.5.2.i Démarche générale

On présentera dans la suite de ce chapitre des cas où seule la composante longitudinale du tenseur de contrainte résiduelle de référence est non nulle. Celle-ci aura une distribution hétérogène selon une forme analytique dans la largeur (suivant  $y$ ) et constante suivant la longueur (suivant la direction  $x$ ).

Un défaut de planéité en bords longs se traduit par des bords ondulés, ce qui nécessite a priori un profil présentant une compression en rive ; inversement, il faut une compression au centre pour un défaut en centre long. Comme exemple, on adoptera dans un premier temps un profil de référence utilisé par Bush et al. [59] (cf. figure 4-12 : bords longs), dans le but de comparer avec ses travaux. Ce profil est appliqué à une plaque de longueur  $l = 500\text{mm}$ , de largeur  $b=100\text{mm}$  et d'épaisseur  $h=1\text{mm}$ . Les propriétés élastiques sont données par le module d'Young  $E=200\text{GPa}$  et le coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ .



**Figure 4-12.** Profil de la contrainte longitudinale résiduelle de référence  $\sigma_{xx}$  suivant la largeur de la bande, favorisant un flambage en bords longs (profil utilisé par Bush et al. [59]).

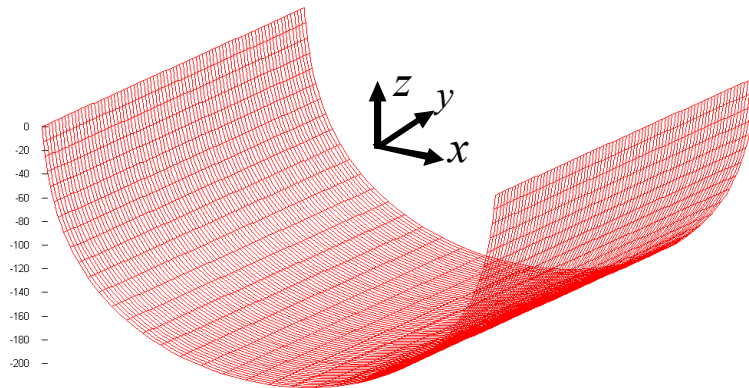
#### 4.5.2.ii Importance de la force externe de traction $P$

Pour que la simulation de flambage reste cohérente avec le procédé de laminage, une traction  $P$  sur le « bord 3 » doit être impérativement prise en compte. Celle-ci n'est pas explicitement prise en compte dans les travaux de Bush, mais elle apparaît comme une moyenne non nulle et positive du profil imposé. A titre d'exemple, le profil de référence de la figure ci-dessus a une moyenne de 207MPa environ. Cela veut dire que la bande est soumise à une traction d'intensité 207MPa et une distribution de contrainte résiduelle auto-équilibrée  $\tilde{\sigma}_{xx}(y)$  telle que :

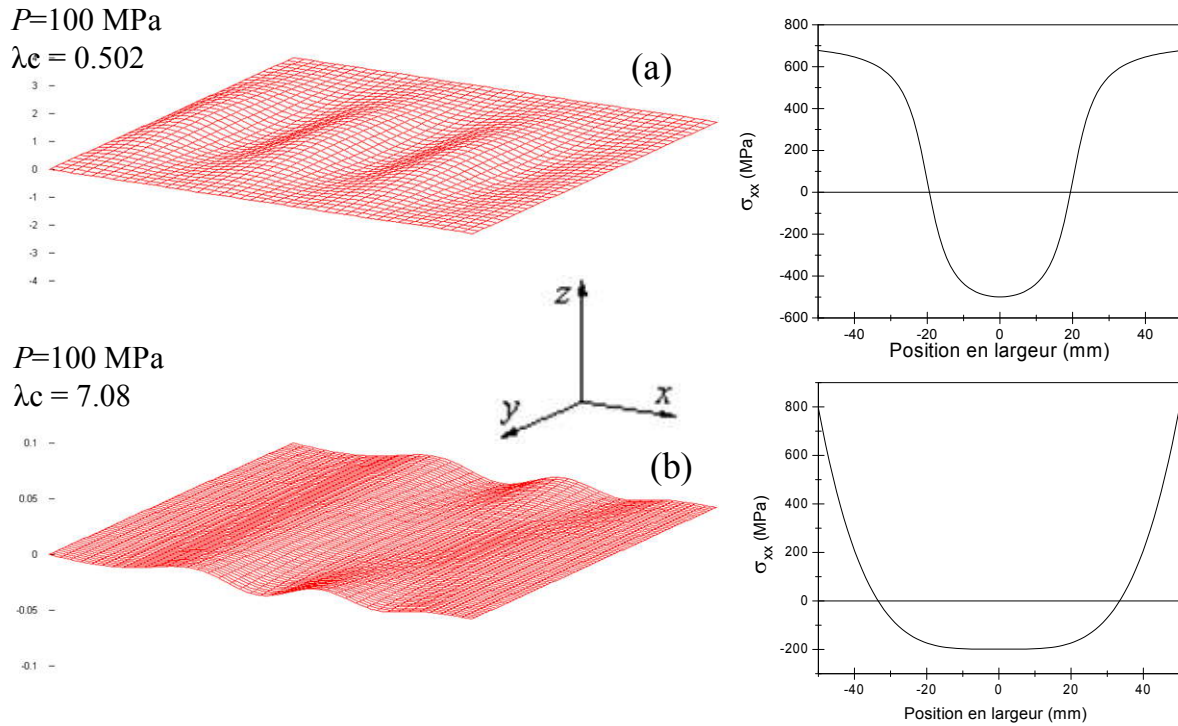
$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(y) &= P + \tilde{\sigma}_{xx}(y) \\ P &= \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{xx}(y) dx \\ \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \tilde{\sigma}_{xx}(y) dx &= 0\end{aligned}\tag{4.40}$$

Néanmoins, nos calculs ont montré que la traction  $P$  doit être impérativement prise en compte, c'est-à-dire qu'elle doit être considérée comme condition aux limites, sur le « bord 3 ». D'ailleurs nous allons constater dans la suite qu'en utilisant le modèle « MAN » pour n'importe quel champ de contraintes résiduelles de référence, une tôle non tendue ( $P=0$ ) flambe suivant un mode global. Ceci est vrai même pour des champs de contraintes résiduelles de référence ayant une moyenne strictement positive suivant la longueur de la tôle. Particulièrement, pour ce cas traité dans lequel la moyenne de  $\sigma_{xx}(y)$  est égale à 207 MPa, on obtient pour une traction  $P$  nulle le mode de la figure 4-13.

De même, on a tenté d'imposer un profil de contraintes censé donner un centre long. Contrairement aux cas de flambement en bords longs, on a constaté qu'un défaut en centre long à proprement parler n'est obtenu que si la zone de compression est localisée au centre, sur une fraction modeste de la largeur (cf. figure 4-14).

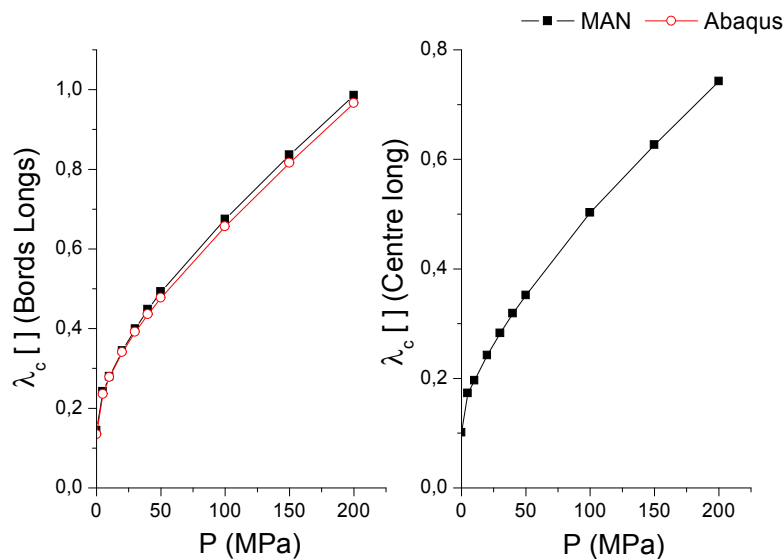


**Figure 4-13. Déformée de la tôle pour une traction nulle et le profil de contrainte résiduelle longitudinale de la figure 4-12.**



**Figure 4-14. Formes post-flambées de deux plaques soumises à des contraintes résiduelles  $\sigma_{xx}$  non uniformes dans la largeur (favorisant un flambage en centre long) et une traction  $P=100\text{MPa}$ .**

On peut observer l'effet de la traction imposée explicitement sur le « bord 3 » à travers les résultats suivants. En effet, en analysant la figure 4-16, on constate que les défauts de planéité sont de plus en plus localisés quand on fait croître la traction  $P$ . Au-delà d'un certain niveau de cette dernière, les modes deviennent invariants ce qui correspond au domaine quasi-linéaire de la courbe  $\lambda_c=f(P)$  sur la figure 4-15. Sur cette même figure, on montre que ces résultats ont été également obtenus par Abaqus<sup>®</sup>, en utilisant des champs de contraintes thermiques comme expliqué dans le paragraphe 2.5.1.ii. Ainsi, on vient de montrer la nécessité de soumettre la plaque à une traction à l'extrémité pour obtenir le bon mode de flambage sous contraintes résiduelles et approcher les conditions réelles de laminage.



**Figure 4-15. Influence de la traction  $P$  sur la charge critique de flambage  $\lambda_c$  pour les cas représentés dans la figure 4-16.**

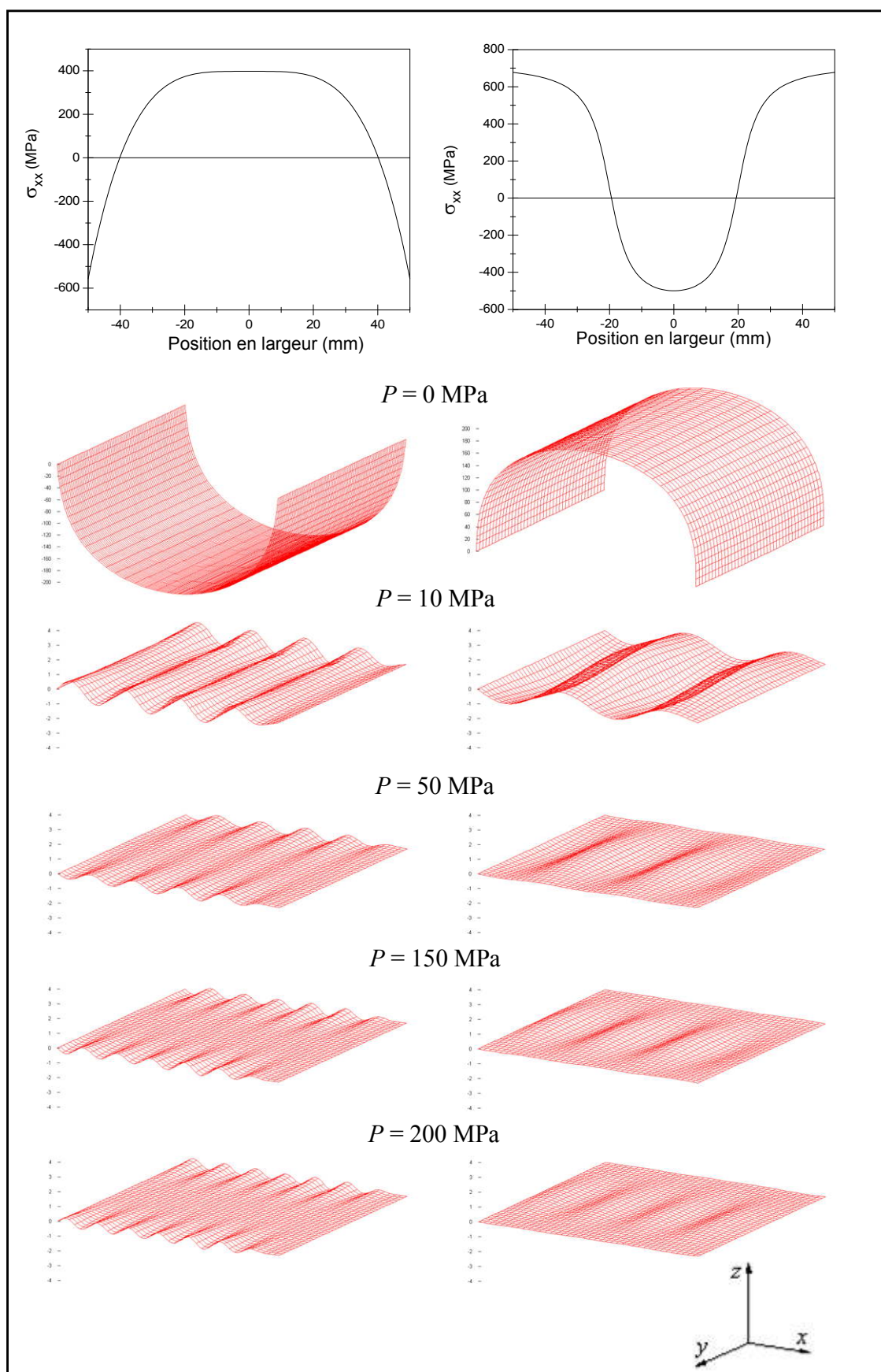


Figure 4-16. Influence de la traction  $P$  sur le mode de flambage en bords longs et en centre long, pour des contraintes résiduelles  $\sigma_{xx}$  uniformes dans la longueur de la plaque, ayant les profils présentés en haut de la figure.

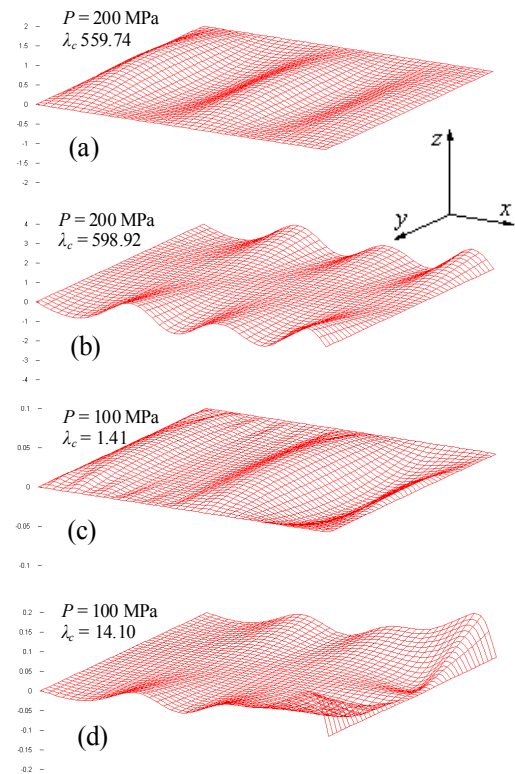


### 4.5.2.iii Retour sur les conditions aux bords et au centre

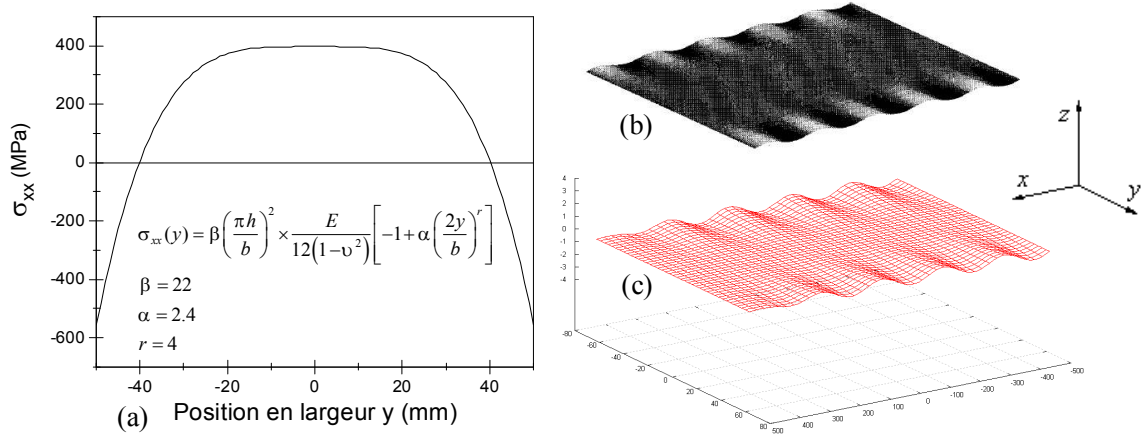
Si on revient aux articles ([54,56-59,67]), on constate que les modèles existants sont limités par un besoin de connaissance a priori du mode de flambage à obtenir, reposant sur une analyse visuelle des distributions de contraintes résiduelles de référence appliquées. Fisher et al. ([56-58]) choisissent une forme analytique du mode comprenant des paramètres, avec lesquels ils cherchent à minimiser une fonctionnelle qui représente l'énergie de déformation élastique du flambage. Par ailleurs, Bush [59] et Yukawa [60] s'assurent d'obtenir le mode présumé en imposant les conditions aux limites nécessaires. Par exemple, une fixation de toute la rangée de nœuds de la ligne du centre le long de la plaque est nécessaire afin d'obtenir un mode en bords longs ; on fixe la ligne du bord si on veut obtenir un mode en centre long.

En fait, quel que soit le champ de contrainte résiduelle de référence appliqué à une plaque, le calcul MAN montre que les modes en centre long et en bords longs sont obtenus en fonction des conditions aux limites imposées (cf. figure 4-17). Pour une plaque soumise simplement à la contrainte longitudinale homogène utilisée dans le paragraphe 4.5, on peut obtenir un mode en centre long si on fixe le bord et en bord long si on fixe le centre. De même, pour le profil de la figure 4-12, qui a causé naturellement un flambage en bords longs, si on fixe les bords, on obtiendra un flambage en centre long ; inversement pour le profil de la figure 4-14-a, si on fixe le centre, on obtient un bord long. Cette fixation des conditions aux limites en fonction d'une solution présumée n'est pas nécessaire dans le présent modèle « MAN », ce qui lui donne une plus grande généralité.

Réalisons une comparaison avec un cas traité par Bush et al. [59] : une plaque dont les propriétés élastiques sont identiques au cas précédent, mais de longueur  $l = 500\text{mm}$ , de largeur  $b=100\text{mm}$  et d'épaisseur  $h = 1\text{mm}$ , soumise au profil de contraintes longitudinales résiduelles de référence  $\sigma_{xx}(y)$  montré dans la figure 4-18-a. Par ailleurs, on rappelle que pour obtenir des bords longs, les auteurs de [59] fixent le centre de la plaque et pour obtenir un centre long, ils fixent les bords. On a vu que ces conditions aux limites supplémentaires, ne faisant pas partie du problème posé, leur permettent d'aboutir aux résultats souhaités. Ainsi, pour ce profil typiquement obtenu en laminage, les auteurs fixent le centre de la plaque en supposant qu'a priori le mode de flambage est en bords longs. Notre modèle n'a besoin d'aucune de ces conditions supplémentaires ; toutefois, dans le but de faire une comparaison exacte avec les travaux de Bush et al. [59], nous adoptons ici les mêmes conditions : une fixation du centre de la plaque ayant les bords libres et les deux extrémités en appuis simples et sans traction ( $P = 0\text{ MPa}$ ). Les figure 4-18-(b) et (c) montrent que les résultats sont quasi-identiques, sauf que notre modèle est capable de fournir la forme post-flambée : l'amplitude des défauts est de l'ordre de 2mm.



**Figure 4-17. Les modes de flambage en centre long ou en bords longs pourront être obtenus pour n'importe quel chargement en jouant sur les conditions aux limites. (a) : plaque sous chargement homogène  $\sigma_{xx} = -10\text{ MPa}$  ayant les bords fixes ; (b) : plaque sous chargement homogène  $\sigma_{xx} = -10\text{ MPa}$  ayant le centre fixe ; (c) plaque sous chargement  $\sigma_{xx}$  ayant le profil suivant la largeur montré dans la figure 4-12 en fixant ses bords ; (d) plaque sous chargement  $\sigma_{xx}$  ayant le profil suivant la largeur montré dans la figure 4-14-a en fixant le centre.**

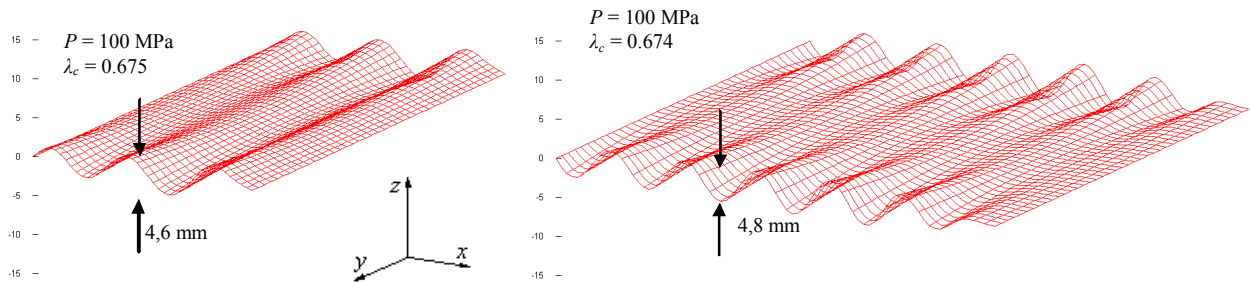


**Figure 4-18. Comparaison entre les résultats obtenus par Bush et al. [59] (b) avec ceux du présent modèle de flambage (c) pour les conditions citées dans le paragraphe 4.5.2.**

#### 4.5.2.iv Choix de la longueur de plaque

La finalité de nos travaux est de modéliser les défauts de planéité en laminage dus au flambage sous l'effet des contraintes résiduelles. Les conditions aux limites naturelles sont la sortie d'une cage et l'entrée de la suivante (ou de la bobineuse), où l'on peut supposer des appuis simples. Mais cette longueur est grande et le calcul devient coûteux. Peut-on raccourcir le modèle, et de combien, sans risquer de fausser les résultats ? Il est clair par exemple que la longueur du modèle doit être supérieure à la longueur d'onde des défauts, mais de combien ?

Des tests ont été réalisés, montrant que le mode de flambage et la nature du défaut ne sont pas affectés par la longueur de la bande si cette dernière reste supérieure ou égale à la longueur d'onde du défaut. La figure 4-19 montre que pour une longueur égale à trois ou à six fois la longueur d'onde, le mode est le même.



**Figure 4-19. Absence d'influence de la longueur de la bande sur le mode de flambage local (ici, flambage en bords longs).**

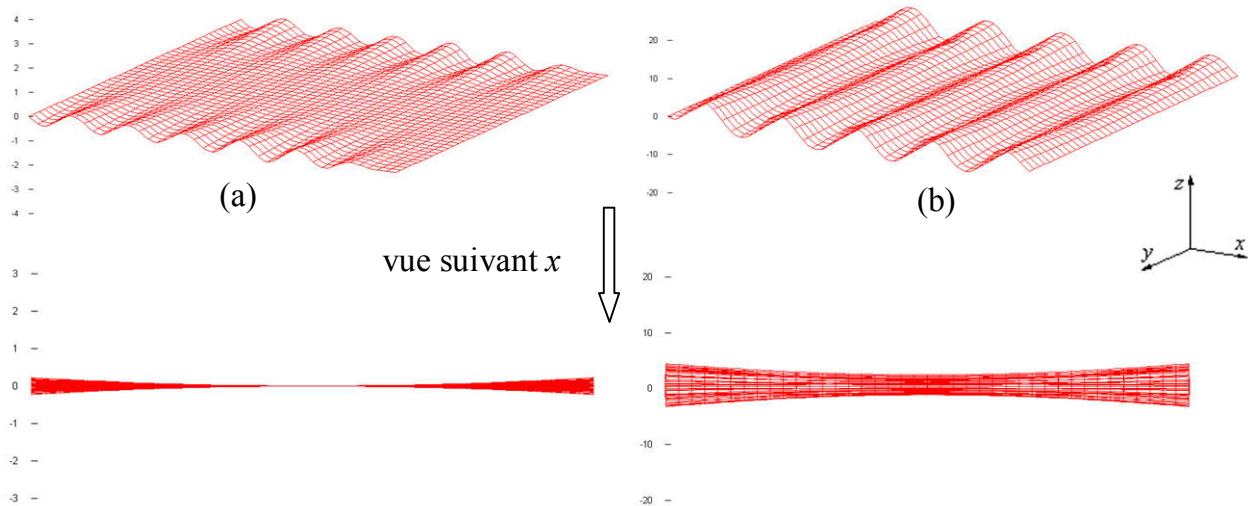
#### 4.5.2.v Notion de planéité latente et planéité manifeste en utilisant le modèle « MAN »

Dans le paragraphe 4.5.2.ii, nous avons montré des exemples de calcul de l'état post-flambé d'une plaque soumise à un champ de contraintes résiduelles hétérogènes, pour différents niveaux de traction  $P$ . Parmi ces exemples, reconsidérons le profil de contrainte défini figure 4-12, avec une traction  $P$  égale à 150 MPa. La forme post-flambée de la plaque est retracée ci-dessous.

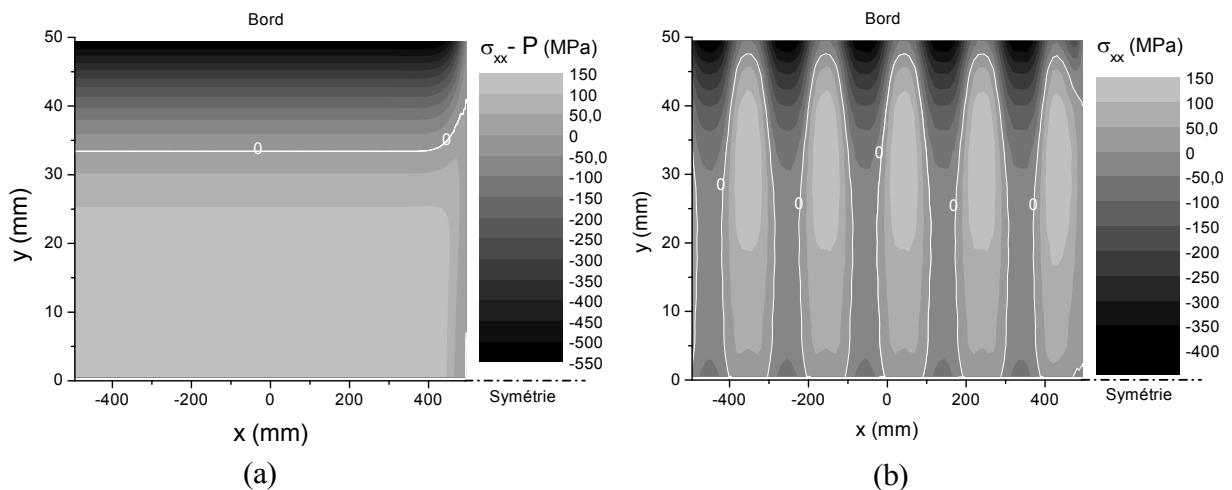
Sous traction, les ondulations perçues dans la figure 4-20-(a) représentent un défaut manifeste en bords longs qui, par analogie avec le laminage, apparaît en ligne (en cours de laminage, sous traction). La partie latente du défaut est cachée par l'effet de la traction (voir les notions de dé-

fautes latents et manifestes § 1.2.2), et se transforme en défaut manifeste quand on relâche la traction  $P$  (quatrième étape du calcul : cf. § 4.3.4).

Nous pouvons prédire les défauts latents pour ce cas en observant la répartition du champ ( $\sigma_{xx} - P$ ) dans la plaque flambée sous traction. À l'aide de la figure 4-21–(a), on constate que cette quantité est négative près des bords : elle représente un défaut latent, qui se libère en déformation supplémentaire quand on relâche la plaque. Cette déformation supplémentaire engendre le changement de mode, par rapport à l'état sous traction (figure 4-20–(b)), et la redistribution des contraintes internes (cf. figure 4-21–(b)).



**Figure 4-20. (a) : État post-flambé d'une plaque soumise à un champ de contrainte résiduelle hétérogène de référence  $\sigma_{xx}$  ayant le profil défini sur la figure 4-12, et une traction  $P = 150$  MPa ; (b) : État post-flambé de la plaque suite à son relâchement.**



**Figure 4-21. (a) : Distribution du champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  (à  $P$  près) dans la plaque après le flambage sous traction ; (b) : Champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  redistribué après le relâchement de la traction.**

## 4.6 Conclusion

De l'analyse bibliographique présentée dans le chapitre 2, nous avons conclu qu'un modèle EF basé sur une formulation de coques serait le mieux adapté à la simulation du flambage des tôles et des défauts de planéité en laminage. Dans cette vision, nous avons construit un modèle de flambage de coques utilisant la MEF et la MAN. Ce modèle a été conçu de telle sorte qu'il puisse détecter avec précision la charge critique et le mode de flambage, même pour des chargements complexes, avec de plus la capacité de faire des calculs de post-flambage. Ce modèle « MAN » a été validé par des applications ayant des solutions analytiques et des comparaisons avec d'autres modèles issus de la littérature, ainsi qu'avec le logiciel Abaqus®.

Les points les plus importants à souligner sont :

- Comparé aux modèles existants, on a montré que le modèle « MAN » est suffisamment riche pour détecter « spontanément » des modes de flambage, sans rajouter de conditions aux limites non représentatives du problème initialement posé et fondées sur une estimation a priori du mode de flambage.
- Ce modèle a montré que la traction  $P$  appliquée sur une plaque influe considérablement sur la solution obtenue.
- La MAN est un très bon outil pour le pilotage des calculs en présence d'instabilités.

## CH.5 Modèle de laminage Lam3/Tec3-MAN découplé

Dans l'approche découplée, la différence par rapport aux exemples du chapitre 4 est que le modèle de flambage est utilisé en chaînage avec Lam3/Tec3 de la manière suivante :

- un premier calcul de laminage est effectué à l'aide de Lam3/Tec3, sans tenir compte du flambage, fournissant des champs de contraintes résiduelles, y compris hors emprise.
- Ces champs de contraintes résiduelles sont utilisés comme chargements dans le calcul de flambage de coques qui permet d'obtenir la charge critique, le mode de flambage ainsi que l'état post-flambé et la nouvelle répartition des contraintes dans la tôle.

Pourquoi utiliser l'approche découplée ?

Une simulation à l'aide d'un modèle couplé Lam3/Tec3-MAN (cf. chapitre suivant : chapitre 6) est certainement chère en temps de calcul, alors que l'approche Lam3/Tec3-MAN découplée est vraisemblablement plus rapide. Néanmoins, elle n'est permise, a priori, que pour les cas ne présentant pas d'interaction emprise/flambage. Or, il n'est pas tout à fait évident de déceler au préalable la présence ou non de cette interaction pour un cas donné. Ainsi, l'utilisation de la méthode découplée se soumet à une hypothèse forte qui néglige les effets du flambage sur l'emprise et qui risque de donner une fausse solution d'un problème traité. D'ailleurs, même si, pour un cas donné, le flambage n'affecte pas l'emprise, chose qu'on peut vérifier antérieurement avec le modèle Lam3/Tec3-Counhaye, l'approche découplée reste équivoque. En effet, pour les cas dans lesquels on n'a pas observé d'interaction emprise/flambage à l'aide de Lam3/Tec3-Counhaye (« cas 1 » par exemple), les résultats des approches Lam3/Tec3-MAN couplée et découplée doivent être comparés. Si les résultats de ces deux approches s'accordent, cela confirme l'utilisation de l'approche Lam3/Tec3-MAN découplée, mais seulement pour les cas sans interaction emprise/flambage.

Pour effectuer le chaînage entre les deux modèles Lam3/Tec3 et « MAN », qui utilisent deux maillages de nature et de topologie différentes (Lam3/Tec3 : éléments hexaédriques 3D, « MAN » : éléments coques), une technique de transfert de champs basée sur la méthode des moindres carrés mobiles (MLS) est nécessaire. Nous avons toutefois été amené à améliorer et adapter cette technique selon nos besoins, comme détaillé dans l'annexe 3.

## 5.1 Modélisation des défauts de planéité en laminage à l'aide de l'approche découplée

Nous avons repris le cas de laminage appelé « cas 1 », et en avons considéré un autre nommé « cas 3 ». Ce dernier est un cas de laminage d'une tôle de largeur 1232 mm (tôle large) et d'épaisseurs en entrée et en sortie d'emprise respectivement de 0.409 et 0.279 mm (forte réduction). Les tractions de laminage appliquées sont de 179 MPa en amont et de 58 MPa en aval. On utilise la loi de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0.01 (frottement faible). Ces deux cas sont représentés en détails dans les tableaux 1 (pour le « cas 1 ») et 3 (pour le « cas 3 ») de l'annexe 4. Ces cas ont été traités par le modèle couplé Lam3/Tec3-Counhaye détaillé dans le chapitre 3. Avec ce modèle, aucune interaction emprise/flambage n'a été enregistrée, ce qui suggère leur traitement par l'approche découplée. Par ailleurs, on ne possède des données expérimentales (mesures de la planéité latente) que pour le « cas 1 ». Cependant, ces derniers sont suffisants pour juger la validité de nos modèles.

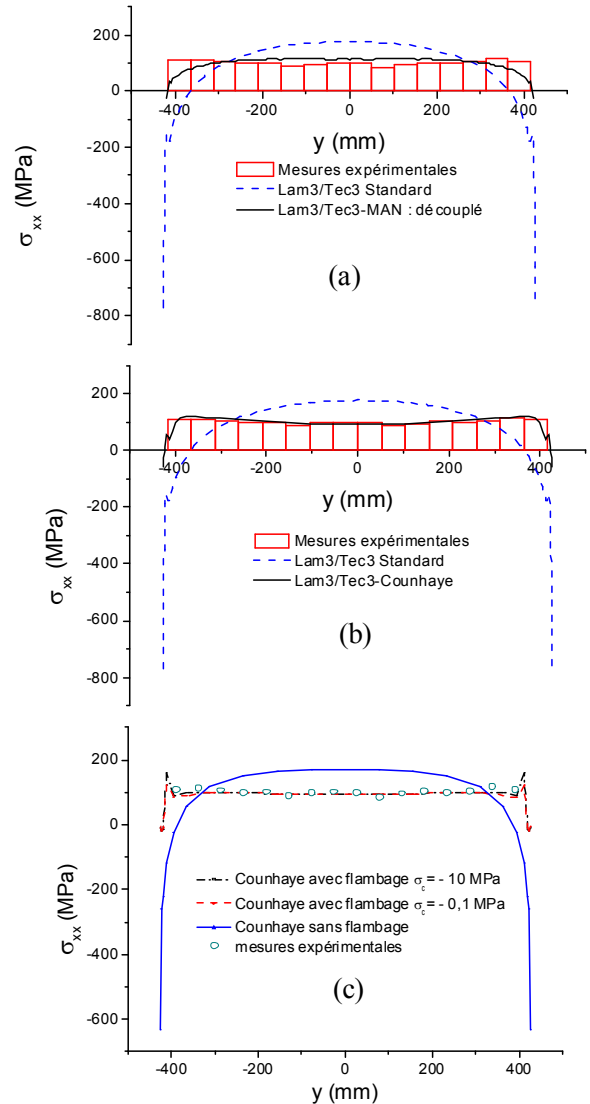
Dans le calcul MAN, nous ne prenons que la partie de la bande en aval de l'emprise, la condition de symétrie sur le « bord 2 » (centre de la bande) a été adoptée, comme dans le calcul de Lam3/Tec3. De plus, la sortie de l'emprise est assimilée à un encastrement sur le « bord 1 », tandis que sur le « bord 3 » on impose une condition d'appui simple ainsi que la traction  $P$ . Quant au « bord 4 », il est considéré libre.

Pour un maillage MAN de 40×40 mailles, les états post-flambés des tôles laminées, issus du modèle de flambage, sont montrés dans les figures 5-2 et 5-3, ainsi que leurs états après relâchement de la traction  $P$ .

### 5.1.1 Discussion des résultats

Si on observe les résultats des figures 5-2 et 5-3, on remarque que cette approche découplée a permis de faire apparaître des défauts de planéité manifestes.

Dans le « cas 1 », un pli longitudinal d'une amplitude de l'ordre de 5 à 6 mm est observé lors du laminage. Le flambage sous traction avec un tel mode a permis de relaxer les contraintes, en particulier  $\sigma_{xx}$  qui est ramenée vers les mesures expérimentales (cf. figure 5-1-a). Ce n'est pas le mode attendu, puisque cette composante de contrainte est compressive aux bords, donc on suspectait un défaut en bords ondulés. Cependant, ce mode, nommé bords longs, n'a été obtenu qu'après le relâchement de la traction, étape dans laquelle le mode a complètement changé (comparer figure 5-2-(b) et (c)).



**Figure 5-1. Modification des profils transversaux de  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage par la prise en compte de flambage dans les différents modèles (« cas 1 »): (a) Lam3/Tec3-MAN découplé ; (b) Lam3/Tec3-Counhaye ; (d) modèle de laminage de Counhaye. D'après [5].**



Quant au deuxième cas, le seul défaut local, qui est vraisemblablement non développable, apparaît juste en sortie d’emprise sous forme de plis longitudinaux (cf. figure 5-3-(b)). Ces défauts apparaissent généralement à cause de la traction et disparaissent quand cette dernière est relâchée. Toutefois, dans les deux cas traités, ces défauts s’amplifient (« cas3 ») ou bien naissent (« cas 1 ») quand la traction est éliminée.

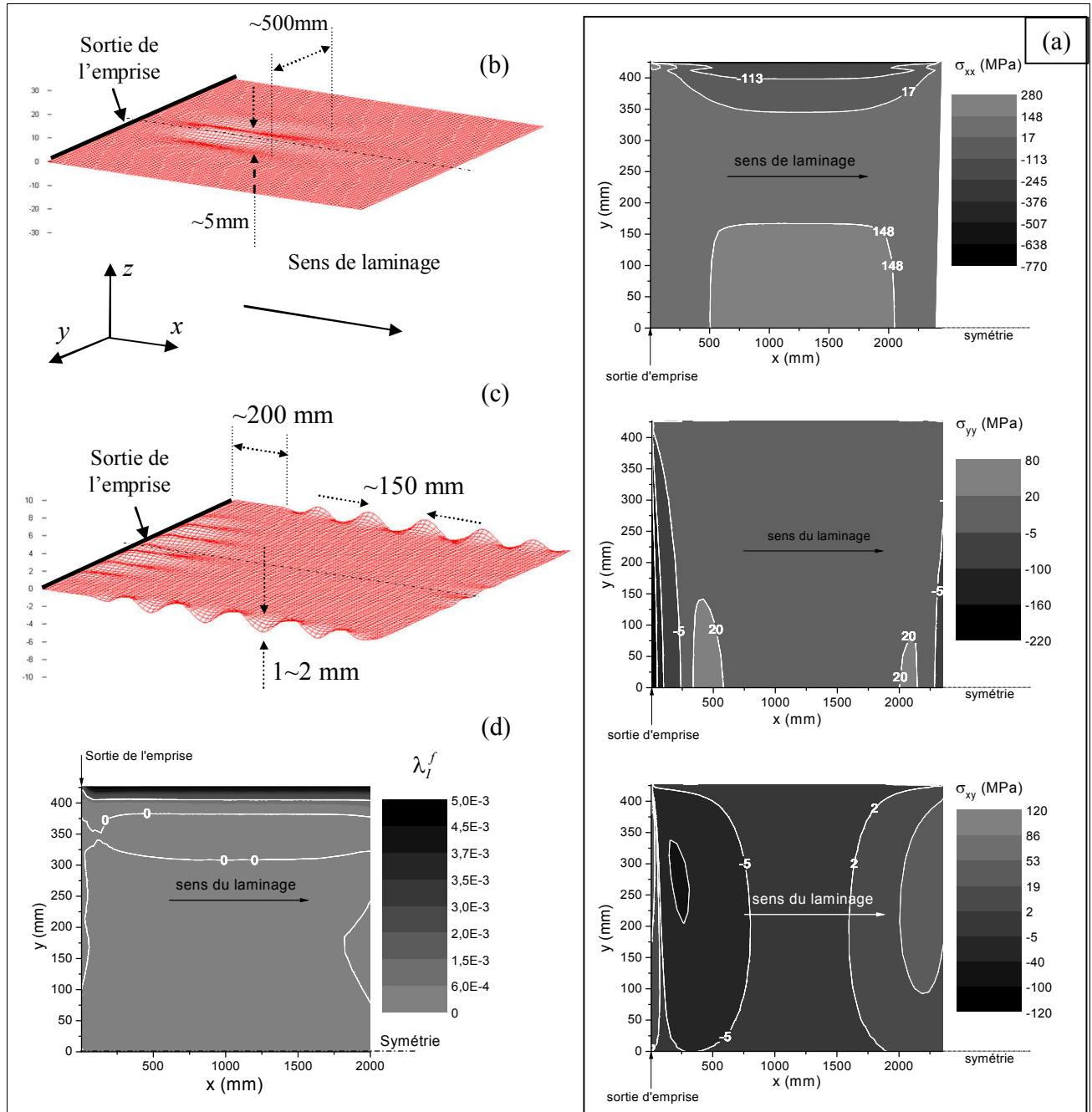
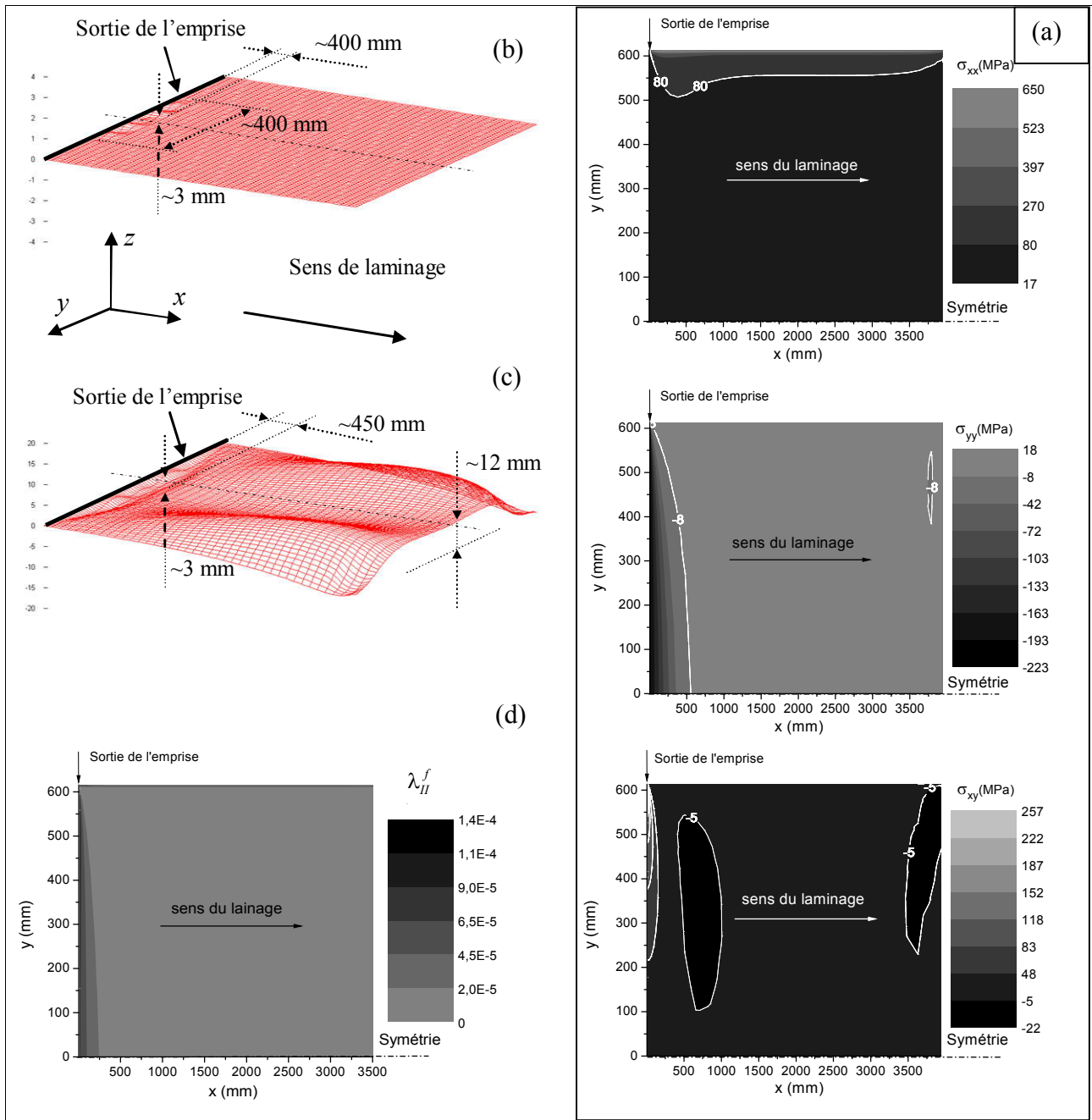


Figure 5-2. Composantes du tenseur de contrainte résiduelle à transférer pour le « cas 1 » ((a)) ainsi que les défauts de planéité qu’ils induisent quand la tôle est sous traction ((b) : résultat du modèle de flambage « MAN » ; (d) : résultat du calcul de flambage donné par Lam3/Tec3-Counhaye) et après le relâchement de cette dernière (c).



**Figure 5-3. Composantes du tenseur de contrainte résiduelle à transférer pour le « cas3 » (a), ainsi que les défauts de planéité qu'ils induisent quand la tôle est sous traction ((b) : résultat du modèle de flambage « MAN » ; (d) : résultat du calcul de flambage donné par Lam3/Tec3-Counhaye) et après le relâchement de cette dernière (c).**

Soit l'analyse plus complète suivante. Sur les figures 5-4 et 5-5, on montre respectivement pour le « cas 1 » et le « cas 3 », les champs de contraintes résiduelles  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  avant (état de référence des contraintes) et après flambage sous traction. En comparant les deux états pour chacun des deux cas, on remarque que les défauts obtenus sous traction ne sont pas suffisamment importants pour modifier la forme des répartitions de ces champs de contraintes.



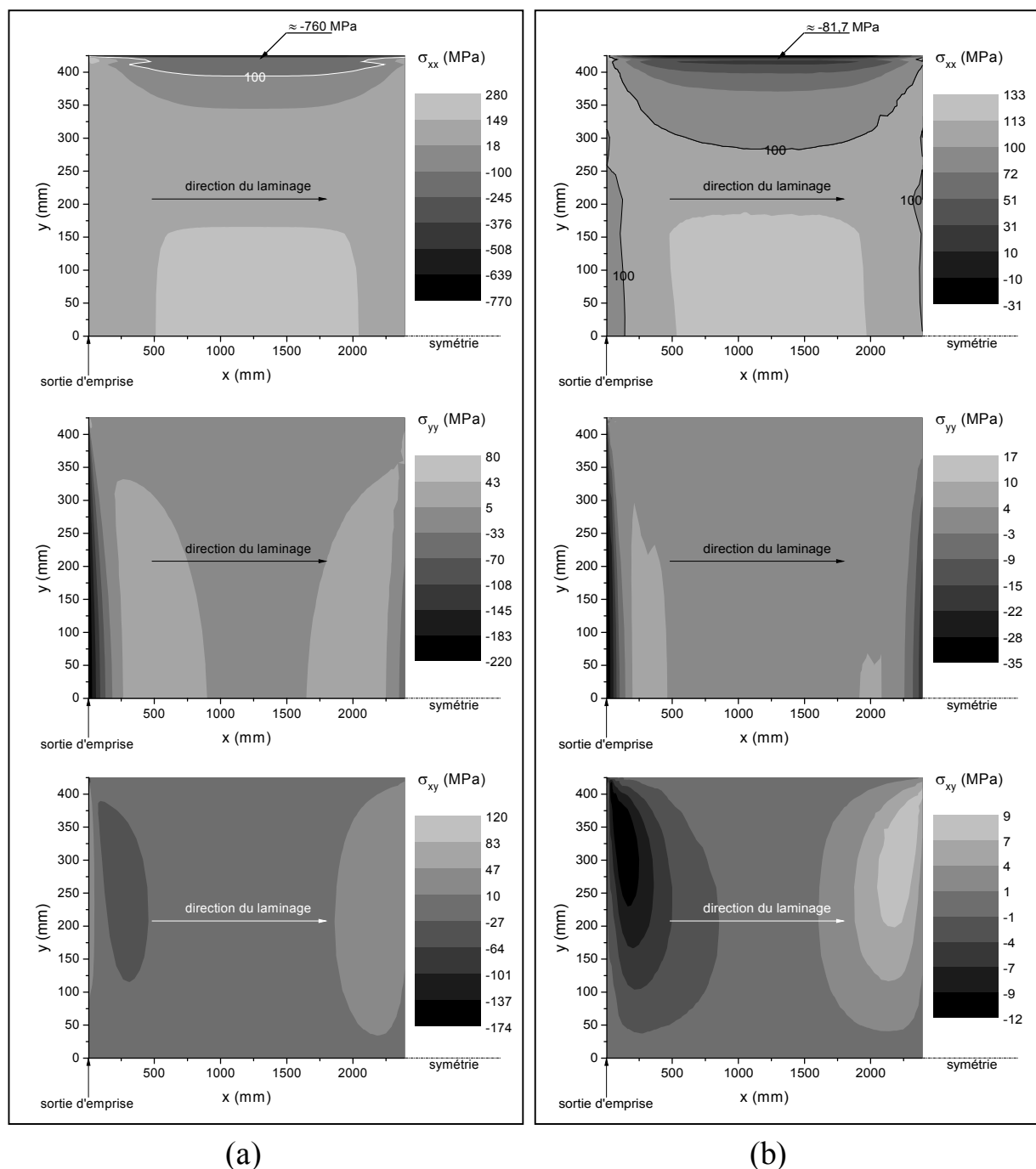


Figure 5-4. Champs de contraintes résiduelles de référence issues de Lam3/Tec3 (a) et champs de contraintes résiduelles après flambage (b) pour le « cas 1 ».

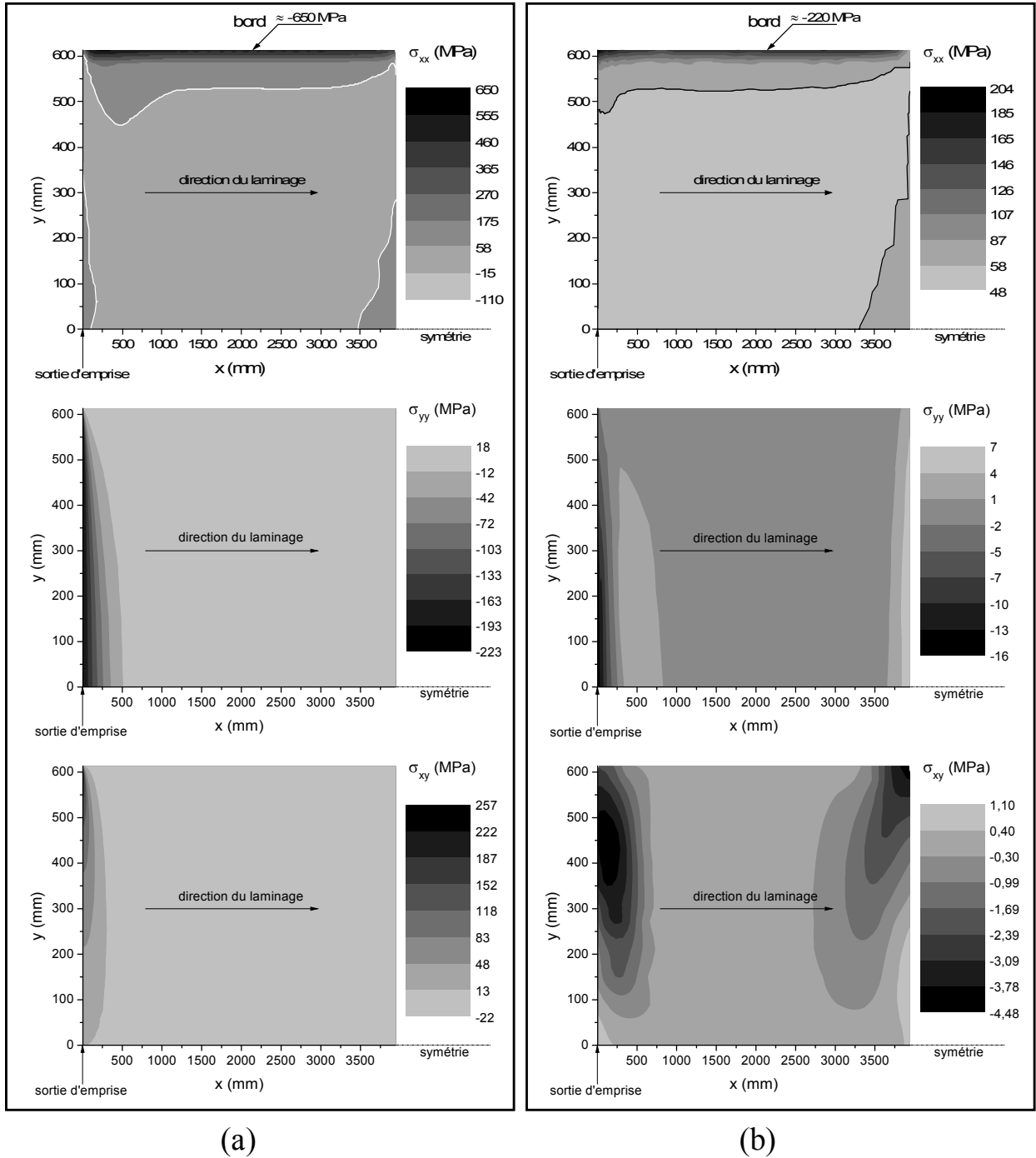


Figure 5-5. Champs de contraintes résiduelles de référence issues de Lam3/Tec3 (a) et champs de contraintes résiduelles après flambage (b) pour le « cas 3 ».

### 5.1.2 Comparaisons entre Lam3/Tec3-MAN découplée et Lam3/Tec3-Counhaye couplée

Cette comparaison est fondée sur l'analyse des figures 5-2 et 5-3 qui regroupent :

- Les cartes des composantes de contraintes issues de Lam3/Tec3-Standard à transférer pour le calcul de flambage à l'aide du modèle « MAN »;
- les défauts de planéité manifestes obtenus à l'aide de Lam3/Tec3-MAN découplé ;
- les défauts de planéité manifestes (carte d'élongation  $\lambda^f$ ) trouvés par le couplage de Lam3/Tec3-Counhaye.

Lam3/Tec3-Counhaye ne traite pas l'étape de relâchement de la tôle (quatrième étape du modèle « MAN »). La comparaison n'est donc effectuée que pour une tôle en cours de laminage, c'est-à-dire quand cette tôle est sous traction.

Pour les cas traités, on constate que les deux modèles concordent sur les défauts de type plis longitudinaux (cf. « cas 3 ») en sortie de l'emprise (défauts stationnaires). Cependant, ils sont en désaccord pour les défauts instationnaires de bords longs (cf. « cas 1 ») : Lam3/Tec3-Couhaye en trouve ( $\lambda^f > 0$ ), pas Lam3/Tec3-MAN. Par rapport à l'expérience, en comparant les contraintes loin après l'emprise sur la figure 5-1, on constate que les résultats du calcul couplé Lam3/Tec3-Counhaye semblent plus précis que ceux du calcul découplé Lam3/Tec3-MAN, malgré les améliorations apportées par ce dernier par rapport à Lam3/Tec3-standard.

## 5.2 Importance de l'utilisation de toutes les composantes planes ( $\sigma_{xx}$ , $\sigma_{xy}$ et $\sigma_{yy}$ ) du tenseur de contraintes résiduelles

Dans l'étude bibliographique du chapitre 2, on a mentionné que des modèles de flambage de coques existants [54,56-59,67] ne prennent en compte que la composante longitudinale  $\sigma_{xx}$  du tenseur de contraintes résiduelles. Cela suppose que les autres composantes, en particulier  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ , ont des effets négligeables sur le flambage et donc sur la planéité. D'autre part, la contrainte considérée  $\sigma_{xx}$  est supposée uniforme suivant la direction de laminage, ce qui exclut la zone au voisinage de la sortie de l'emprise qui présente des variations considérables des contraintes, déformations et vitesses, qui ne se stabilisent que plus loin vers l'aval. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une modélisation précise des défauts de planéité en laminage demande de :

- considérer toutes les composantes planes du tenseur de contraintes résiduelles hors emprise :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  ;
- tenir compte de la zone transitoire au voisinage de l'emprise, qui présente généralement de fortes variations de contraintes.

### 5.2.1 Calcul des défauts de planéité en laminage en ne transférant que la composante longitudinale $\sigma_{xx}$ du champ de contraintes résiduelles

Prenons le « cas 1 ». Les résultats de la modélisation des défauts de planéité pour ce cas sont détaillés dans le paragraphe 5.1.1, où les composantes planes du tenseur de contrainte résiduelle ont toutes été considérées. Nous avons traité le même problème en ne transférant que la composante  $\sigma_{xx}$ , dont on représente la distribution sur la figure 5-6. Nous avons constaté que les résultats ne sont plus les mêmes : sous traction (en cours de laminage), le pli longitudinal représenté sur la figure 5-2-(b) a disparu<sup>10</sup>, laissant place à des plis proches de l'extrémité sur laquelle la traction est appliquée (cf. figure 5-7-(a)). Nous avons tendance à croire que ces derniers plis ne sont

---

<sup>10</sup> On comprend que ce pli est dû principalement à la contrainte  $\sigma_{yy}$ .

qu'un effet de bord ; dans la réalité, cette extrémité peut être l'entrée d'une prochaine emprise d'une cage suivante, ou d'une bobineuse.

Ces résultats montrent qu'il n'y a pas que la contrainte  $\sigma_{xx}$  qui contribue au flambage, ce qui signifie qu'il faut inclure au moins les composantes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  dans les calculs (si on se place dans l'hypothèse de contrainte plane). Mais il est intéressant de noter que relâcher la traction fait apparaître le même défaut manifeste en bords longs (amplitude 2 mm, longueur d'onde 150 mm), commençant au même endroit que dans la figure 5.2. Autrement dit, le bord long serait sensible essentiellement à  $\sigma_{xx}$ , et  $\sigma_{yy}$  ne jouerait que sur les plis longitudinaux.

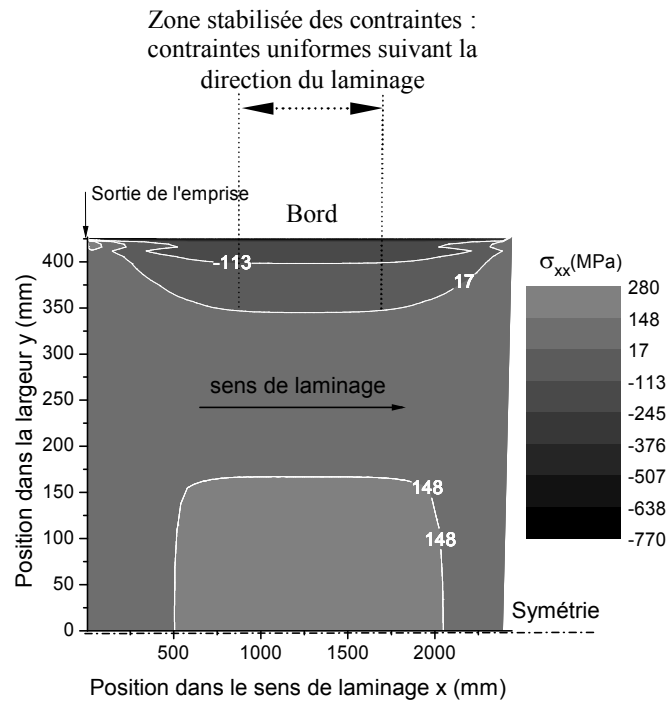


Figure 5-6. Distribution de la contrainte longitudinales  $\sigma_{xx}$  dans la tôle en aval de l'emprise pour le « cas1 ».

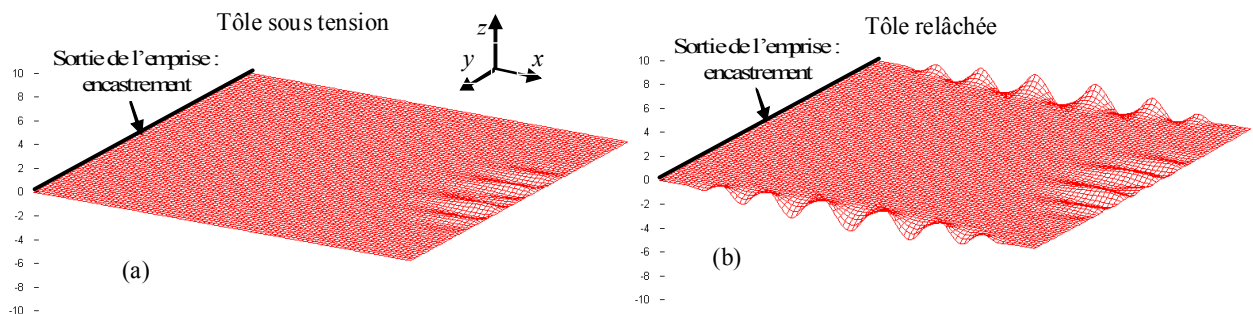
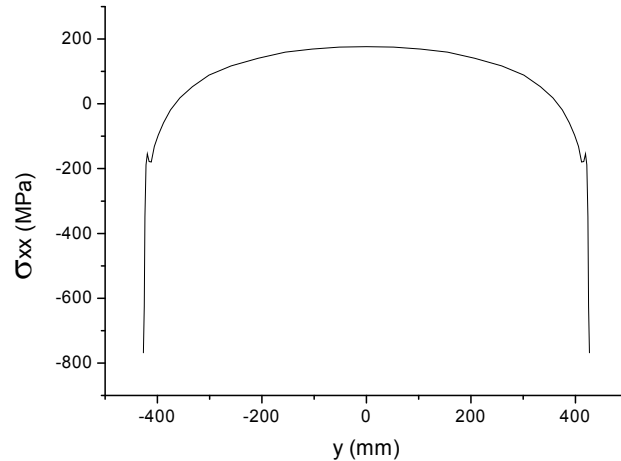


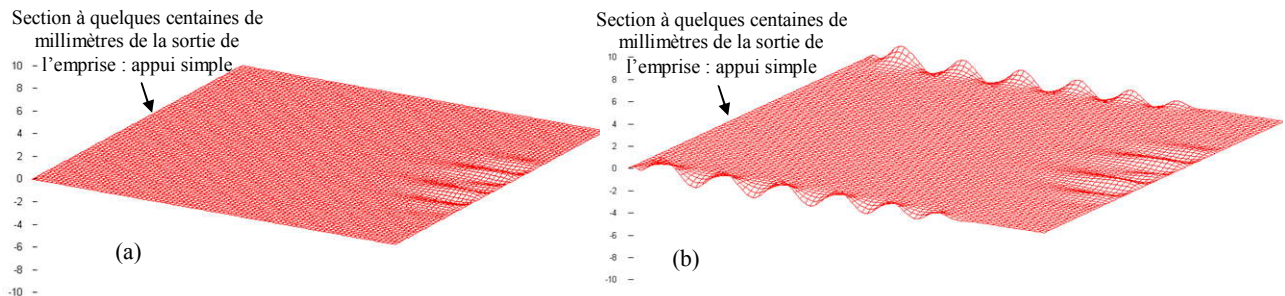
Figure 5-7. Défauts de planéité pour le « cas 1 » en ne considérant que la composante longitudinale  $\sigma_{xx}$  du tenseur de contrainte résiduelle.

### 5.2.2 Calcul des défauts de planéité en laminage en ne transférant que la composante longitudinale $\sigma_{xx}$ du champ de contrainte résiduelle, supposé uniforme suivant la direction de laminage

On transfère maintenant toute la zone transitoire au voisinage de l'emprise (« zone 1 » de la figure 2-9) dans l'approche découplée Lam3/Tec3-MAN.



**Figure 5-8. Profil de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  stabilisée à partir de quelques centaines de millimètres de l'emprise.**



**Figure 5-9. Défaut de planéité pour le « cas 1 » on ne considérant que la composante longitudinale  $\sigma_{xx}$  du tenseur de contrainte résiduelle dans la zone stabilisée de la tôle, où les contraintes deviennent uniformes dans la direction du laminage.**

On remarque que dans le « cas 1 » les ondulations aux bords n'apparaissent pas directement à la sortie d'emprise, ce qu'on a déjà remarqué sur les figures 5-2-(c) et 5-7-(b). Est-ce intrinsèque au problème considéré, ou est-ce dû à la zone de transition en sortie d'emprise ? Pour le savoir, nous éliminons cette zone de transition et ne transférons que les contraintes stabilisées.  $\sigma_{xx}$  devient donc uniforme suivant la direction du laminage (profil rappelé figure 5-8), et les contraintes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sont négligeables. Les ondulations apparaissent maintenant tout près du bord 1 (cf. figure 5-9-(b)). On en déduit ainsi que la naissance tardive des ondulations par rapport à la sortie d'emprise n'est pas un artefact – dû par exemple aux conditions aux limites – dans les calculs considérant les zones transitoires (transfert des « zone 1 » et « zone 2 » de la figure 2-9, paragraphes 5.1 ou 5.2). Il ne faut donc pas exclure la zone transitoire proche de l'emprise. Cependant, de nouveau, ni l'amplitude ni la longueur d'onde des

défauts ne sont affectées significativement : le transfert de la « zone 1 » n'a donc d'effet que dans son voisinage..

### 5.2.3 Complément d'analyse des résultats de l'approche Lam3/Tec3-MAN découplée

Reprenons les résultats des figures 5-2-(b) et 5-1-(a). En analysant ces résultats, nous constatons que sous traction (au cours du laminage), la contrainte  $\sigma_{xx}$  de référence (issue de Lam3/Tec3) est relaxée aux bords, bien qu'il n'y ait pas eu de flambement dans ces zones, donc pas de relaxation élastique. La question qui se pose est donc la suivante :

Pourquoi cette contrainte est-elle si bien relaxée aux bords (cf. figure 5-1-(a)) bien qu'il n'y ait pas eu flambement dans ces zones ?

Généralement, un problème de flambage peut admettre plus d'une solution. Le mode obtenu est celui qui présente le minimum de l'énergie. Cela n'est pas toujours intuitif à prévoir : ainsi dans le « cas 1 », la solution trouvée privilégie le flambage en un pli longitudinal au centre de la tôle sous traction (cf. figure 5-2-(a)). Pourtant, les hauts niveaux de contrainte compressive  $\sigma_{xx}$  aux bords feraient plutôt penser à un mode en bords longs. D'autre part, on a mentionné précédemment que dans une structure, le flambage induit une saturation des contraintes à un niveau proche de leur niveau critique de flambage. On l'a vu dans l'exemple simple du paragraphe 4.5. Or c'est la contrainte  $\sigma_{yy}$  que le mode de flambage en un pli longitudinal devrait relaxer. Il faut donc imaginer que la relaxation de  $\sigma_{yy}$  dans la « zone 1 » entraîne une réorganisation de  $\sigma_{xx}$  pour rétablir l'équilibre, qui expliquerait la relaxation des compressions aux bords sur la figure 5-1-(a) sans qu'il soit nécessaire de passer par des bords longs. Ce phénomène est observé dans les applications des deux paragraphes 5.2.1 et 5.2.2. En revanche, pour ces cas, les plis longitudinaux qui apparaissent sous tension sur le bord 3 ne sont en fait que des effets de bord<sup>11</sup>.

## 5.3 Conclusion

Le logiciel de laminage Lam3/Tec3 fournit des distributions de champs de contraintes résiduelles souvent complexes. De plus, la topologie de son maillage hétérogène est largement différente de celle du modèle « MAN ». Ainsi, le transfert de champs à partir de Lam3/Tec3 au modèle « MAN », dans le cadre de l'approche découplée (par chaînage entre les deux modèles), nécessite une technique de transfert basée sur la méthode des moindres carrés mobiles que nous avons optimisée (cf. annexe 3). Par la suite, nous avons montré que le modèle « MAN » est capable de simuler le flambage en prenant en compte toutes les composantes planes des contraintes résiduelles, même quand celles-ci présentent des distributions complexes. Nous avons montré que cela rend plus précise la modélisation des défauts de planéité en laminage.

La question restante est celle de l'approche, couplée ou découplée, nécessaire pour traiter précisément le problème de la planéité et du couplage emprise / post-emprise. Dans le chapitre suivant, on présente une approche couplée, par itérations entre Lam3/Tec3 et le modèle « MAN » (modèle dit Lam3/Tec3-MAN couplé). Le modèle ainsi obtenu peut justifier l'approche découplée si :

- l'approche couplée Lam3/Tec3-MAN confirme l'absence d'interaction emprise/flambage qu'on a pu observer à l'aide de Lam3/Tec3-Counhaye.
- les deux approches couplée et découplée de Lam3/Tec3-MAN aboutissent aux mêmes résultats (état de contraintes hors emprise et état post-flambé de la tôle).

---

<sup>11</sup> Dans nos calculs des défauts de planéité en laminage, les contraintes transversales compressives ( $\sigma_{yy}$ ) qui apparaissent dans la tôle ont trois origines : l'élargissement dans l'emprise, l'effet Poisson dû à la traction et l'effet du bord auquel on impose une condition aux limites.

## CH.6 Modèle de laminage Lam3/Tec3-MAN Couplé

L'approche découplée n'est valable que pour les cas où le flambage a peu ou pas d'effets sur l'emprise. Ainsi, pour qu'un modèle de laminage soit plus riche et complet, un couplage doit être réalisé entre Lam3/Tec3 et le modèle de flambage de coques « MAN ». Dans cette partie, nous exposons la manière dont nous avons effectué ce couplage (et non plus un simple chaînage) pour construire un modèle de laminage général nommé Lam3/Tec3-MAN.

D'autre part, en utilisant le modèle couplé Lam3/Tec3-Counhaye, nous avons montré que le flambage est sans effet sur l'emprise dans le « cas 1 », mais pas dans le « cas 2 ». Le recul nous manque, sur les quelques cas étudiés, pour définir quand cet effet de couplage est significatif, demandant l'approche couplée, et quand il ne l'est pas, justifiant l'approche découplée. Enfin, le modèle par nature couplé Lam3/Tec3 – Counhaye utilise une méthode trop simplifiée pour être complètement satisfaisante. Le modèle couplé détaillé dans ce chapitre servira donc de référence pour de futurs travaux visant à cataloguer les opérations de laminage entre « à coupler » et « à traiter en découplé » (donc à moindre coût).

De ce fait, il est important d'analyser si en utilisant Lam3/Tec3-MAN, le flambage impacte l'emprise de la même façon que Lam3/Tec3 - Counhaye dans les deux types de cas. En outre, il est essentiel de regarder si le traitement couplé des cas sans interaction emprise/flambage donne les mêmes résultats que le traitement découplé détaillé dans le chapitre 5.

Bien évidemment, il est indispensable de valider au préalable l'approche Lam3/Tec3-MAN couplée en comparant ses résultats avec les mesures expérimentales ; rappelons que malheureusement, les seules dont nous disposons sont les profils de  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage.

### 6.1 Construction du modèle de laminage couplé Lam3/Tec3-MAN

Le couplage entre Lam3/Tec3 et le modèle de flambage de coques « MAN » est construit à l'aide de trois modèles de base : Lam3, Tec3 et le modèle « MAN ». Chacun de ces trois modèles possède des entrées (données) et des sorties (résultats) que détaille la figure 6-1. Ils doivent être couplés entre eux de manière que la cage soit calculée par Tec3 (3D), l'emprise par Lam3 (3D) et que le modèle de flambage « MAN » (coque) décrive l'état de la tôle hors emprise. Le modèle obtenu a l'architecture décrite sur la figure 6-2.

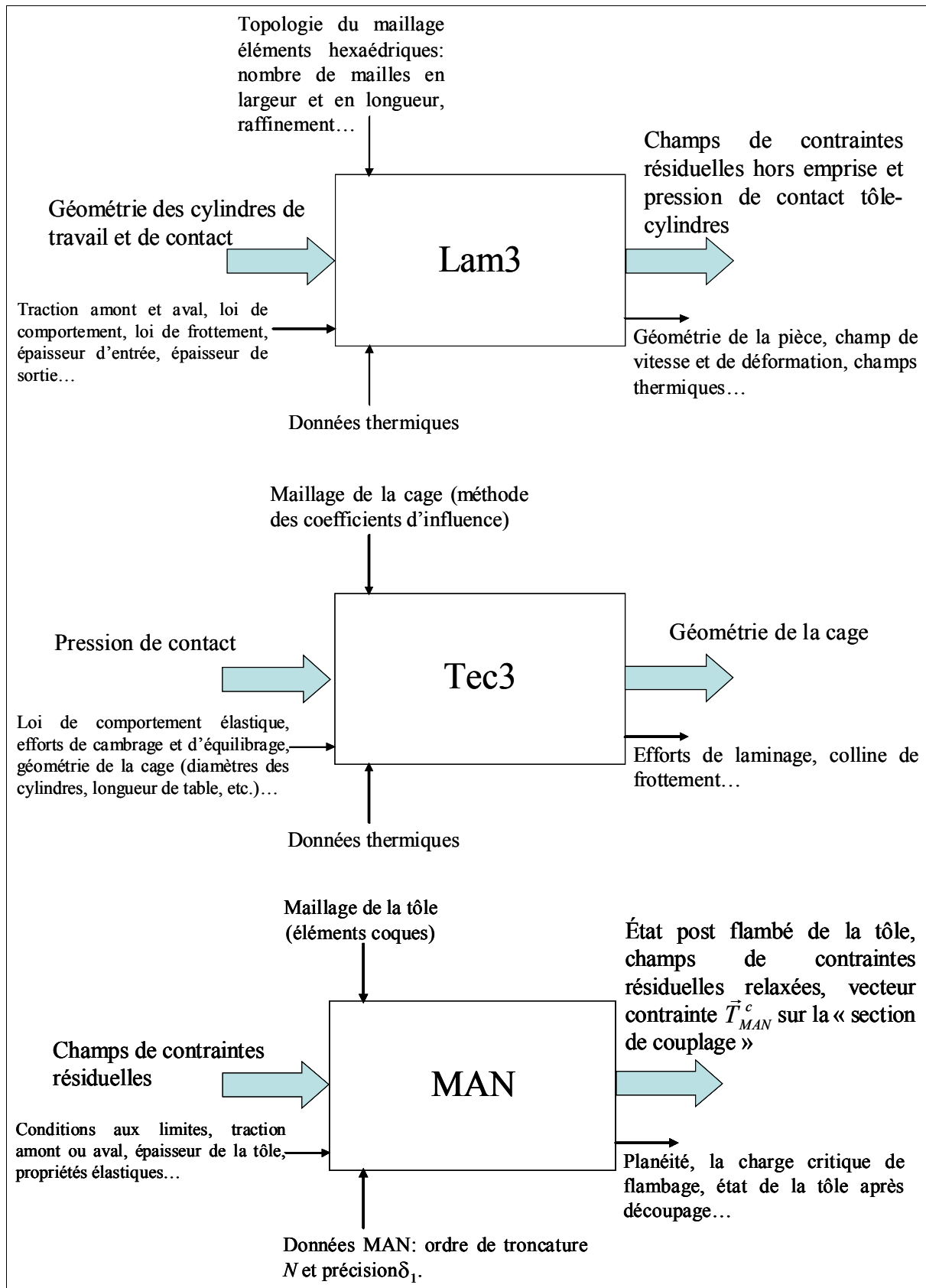
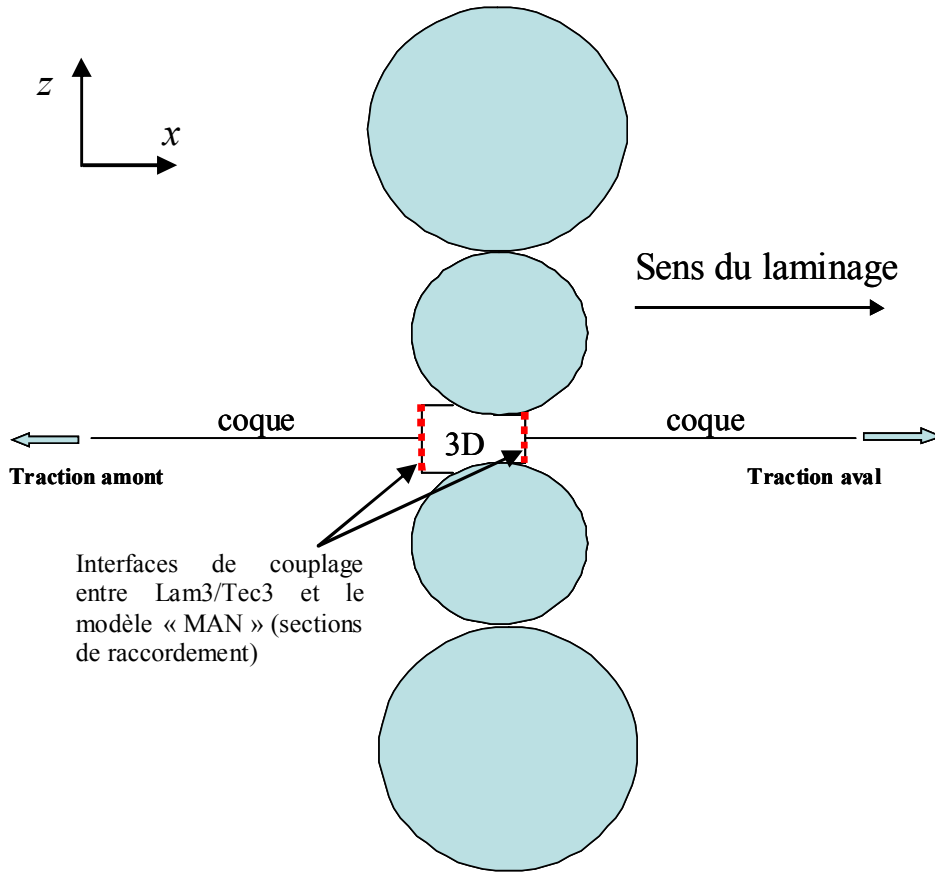


Figure 6-1. Description des modèles Lam3, Tec3 et « MAN » à coupler pour construire le modèle complet de laminage Lam3/Tec3-MAN.





**Figure 6-2. Architecture du modèle de laminage couplé Lam3/Tec3-MAN.**

Lam3/Tec3-MAN est constitué de deux sortes de couplages : un couplage entre Lam3 et Tec3, et un autre entre l'ensemble Lam3/Tec3 et le modèle « MAN ». Le couplage Lam3/Tec3 a été déjà effectué auparavant par Hacquin et al. [2] (chapitre 3). Le présent travail consiste donc à coupler en contraintes Lam3/Tec3 avec le modèle « MAN ».

On définit une interface de couplage (ou section de raccordement), montrée sur la même figure en trait rouge discontinu. Lam3/Tec3 perçoit la redistribution des contraintes causée par le flambage à travers cette interface et par l'intermédiaire du vecteur - contrainte  $\vec{T}_{MAN}^c$ . Ce vecteur contrainte, appliqué sur la facette qui représente la section de raccordement (cf. figure 6-3), est déduit du champ de contrainte redistribué après flambage par la relation suivante :

$$\vec{T}_{MAN}^c = \sigma_{MAN} \cdot \vec{n}_r \quad (6.1)$$

$\sigma_{MAN}$  est le champ de contrainte redistribué par le flambage (calcul MAN) ;

$\vec{n}_r$  est le vecteur normal à la section de couplage ( $= -\vec{x}$ ).

Une fois  $\vec{T}_{MAN}^c$  calculé, il est ensuite transformé en  $\vec{T}_{Lam3}^c$  par la relation (6.2) et imposé en tant que condition aux limites pour un calcul Lam3/Tec3, dans lequel le maillage est tronqué hors emprise et limité par les sections de raccordement (cf. figure 6-3).

$$\vec{T}_{Lam3}^c = -\vec{T}_{MAN}^c \quad (6.2)$$

En d'autre terme, l'équilibre mécanique doit être respecté à l'interface, ce qui signifie aussi la continuité de la contrainte entre les deux modèles.

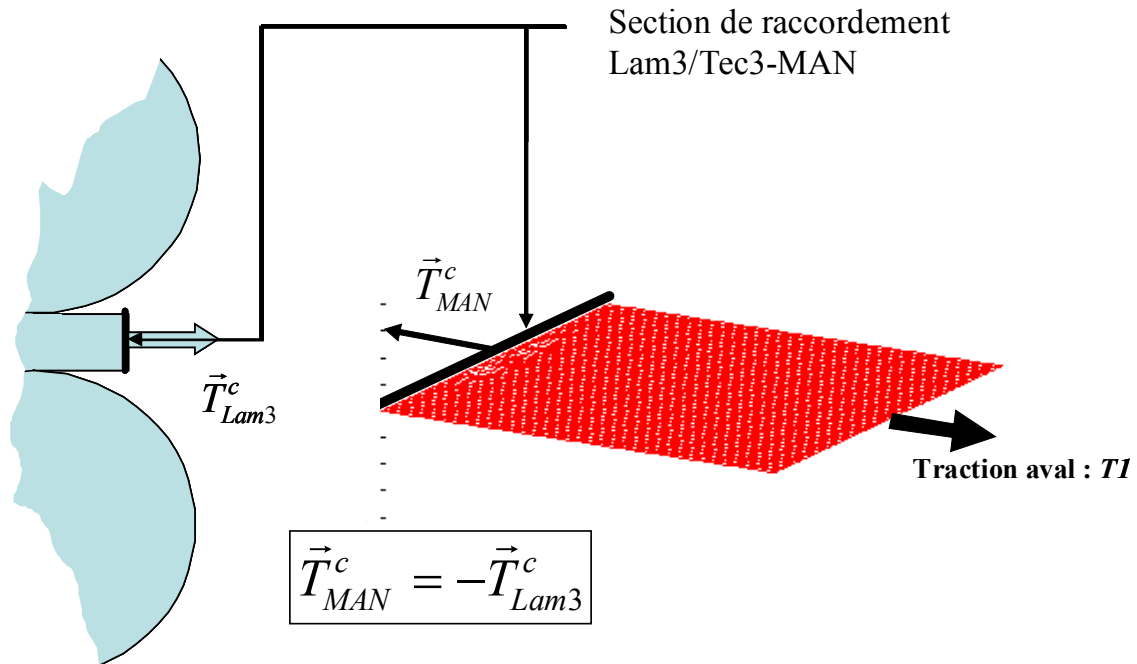


Figure 6-3. Couplage entre Lam3/Tec3 et le modèle de flambage « MAN ».

Le modèle Lam3/Tec3-MAN couplé est construit à l'aide d'un algorithme suivant un schéma itératif entre un calcul Lam3/Tec3 et un calcul « MAN ».

## 6.2 Algorithme de couplage entre Lam3/Tec3 et le modèle « MAN »

L'algorithme commence par un calcul Lam3/Tec3 standard qui fournit les contraintes résiduelles hors emprise ( $\sigma^{res}$ ). Ces contraintes sont ensuite transférées au modèle « MAN » (par la technique de transfert des champs : cf. annexe 3) pour initier un calcul de flambage. Le flambage redistribue et modifie les contraintes à partir desquelles les vecteurs - contraintes  $\vec{T}_{MAN}^c$  et  $\vec{T}_{Lam3}^c$  sont déduits.  $\vec{T}_{Lam3}^c$  est par la suite imposé comme condition aux limites dans un calcul de Lam3/Tec3 standard, mais avec un maillage tronqué hors emprise. Le but de cette étape est de faire interagir l'emprise avec le flambage et la redistribution des contraintes hors emprise qu'il induit. Si l'emprise est influencée par le flambage, la cage le percevra et donc changera de forme.

Pour un schéma itératif, on a besoin de reboucler en recalculant de nouveau le champ de contraintes hors emprise qui correspond au nouvel état de la cage, ce qui n'est possible qu'avec un calcul de Lam3/Tec3 à maillage complet. Pour y parvenir, on récupère la géométrie de la cage établie à la troisième étape, correspondant à la nouvelle répartition des contraintes hors emprise calculées par le modèle « MAN » (calcul Lam3/Tec3 tronqué hors emprise). Cette géométrie est utilisée pour un calcul Lam3/Tec3 avec un maillage complet et avec une cage rigide. C'est ainsi qu'on peut réactualiser la nouvelle répartition des contraintes hors emprise qui sera réintroduite dans le modèle « MAN ».

Les étapes décrites dans ce paragraphe représentent une itération du couplage Lam3/Tec3-MAN ; elles sont reprises jusqu'à la convergence. Celle-ci est établie quand, d'une itération à une autre, l'état du système {cage, emprise, mode de flambage} ne change plus.

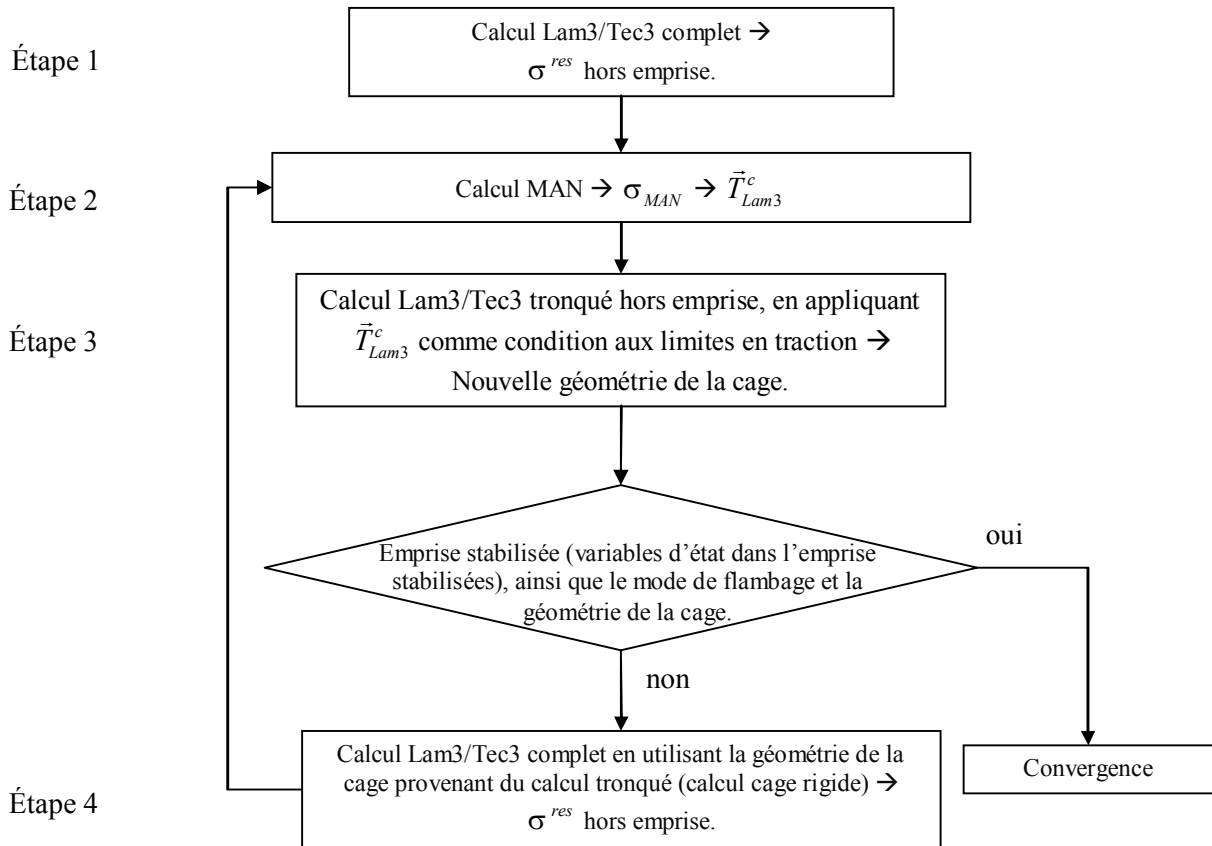


Figure 6-4. Algorithme de couplage Lam3/Tec3-MAN.

La difficulté majeure se trouve à la troisième étape de cet algorithme. Il est difficile de faire correspondre la section de troncature du maillage de Lam3/Tec3 avec la sortie ou l'entrée de l'emprise pour plusieurs raisons :

- Tronquer un maillage de Lam3/Tec3 hors emprise revient à mailler une tôle d'une longueur égale à celle du contact tôle - cylindres. Les extrémités amont et aval d'un maillage Lam3/Tec3 forment par construction des sections transversales droites. Or, l'emprise est délimitée par deux rangées de nœuds suivant la largeur qui forment généralement des courbes (cf. figure 6-5). Il est donc difficile de faire correspondre les sections de troncature droites du maillage Lam3/Tec3 avec ces frontières courbes de l'emprise.
- La longueur du contact dans l'emprise est souvent imprévisible : c'est l'une des inconnues du problème de laminage. Ainsi, définir au préalable un maillage de la tôle ayant une longueur qui coïncide avec la longueur du contact est une opération assez délicate. Un maillage très court, risque de ne pas suffire pour couvrir toute la zone de contact tôle - cylindres.

Il est donc nécessaire d'initier le calcul Lam3/Tec3 avec un maillage qui dépasse légèrement (de quelques millimètres) la zone de contact tôle/cylindres. Cela nécessite une connaissance approximative de l'ordre de grandeur de la longueur du contact. Toutefois, dans nos applications, nous sommes arrivés à choisir une longueur du maillage convenable de la tôle, qui dépasse l'emprise de 1 à 2 millimètres (cf. exemple d'un maillage tronqué en aval de l'emprise sur la figure 6-5). Dans cette zone qui dépasse l'emprise, désignée par le terme de zone de recouvrement,

le maillage 3D de Lam3/Tec3 est superposé avec le maillage coque du modèle « MAN ». Ce dernier est positionné de la telle sorte que le « bord 1 »<sup>12</sup> coïncide avec la sortie de l'emprise.

On rappelle que le couplage de Lam3/Tec3 avec le modèle « MAN » se fait en contrainte, c'est-à-dire qu'il est basé sur la continuité de la contrainte en passant d'un modèle à l'autre. Il faut donc que le vecteur contrainte  $\vec{T}_{Lam3}^c$  à imposer comme une condition aux limites en traction à Lam3/Tec3 vérifie cette continuité définie par (6.2). Par ailleurs, comme le montre l'exemple sur la figure 6-5, la section de troncature du maillage Lam3/Tec3 ne coïncide ni avec la sortie de l'emprise, ni avec le bord 1 du maillage « MAN ». Une deuxième difficulté se pose donc à ce stade : comment déterminer le vecteur contrainte  $\vec{T}_{Lam3}^c$  (donc  $\vec{T}_{MAN}^c$ ) à partir des champs de contraintes issues du modèle « MAN », qui vérifie la continuité de contrainte ?

#### Remarque 11 :

Pour rendre les calculs moins coûteux en CPU, dans nos applications du modèle couplé Lam3/Tec3-MAN, nous avons utilisé le modèle coque uniquement dans la partie aval de l'emprise. Cela implique qu'on a supposé qu'au cours de son défilement, la tôle arrive parfaitement plate dans l'emprise, ce qui fait qu'il n'est pas nécessaire de calculer le flambage en amont de l'emprise.

Les sections de troncature amont et aval de Lam3/Tec3, situées dans les zones de recouvrement (cf. figure 6-5), sont supposées droites (de normales  $\pm \bar{x}$ ). Le vecteur contrainte  $\vec{T}_{Lam3}^c$  appliqué à l'une de ces sections est composé de  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et de  $\sigma_{xz}$  issues du calcul de flambage (« MAN »). Cependant, ces composantes sont définies aux points de Gauss du maillage coque qui diffère significativement du maillage Lam3/Tec3. On fait donc appel à la méthode des moindres carrés mobiles (MLS) décrite en annexe 3, qui permet d'interpoler les composantes du vecteur  $\vec{T}_{Lam3}^c$  à partir des champs de contraintes issues du modèle « MAN ». Dans ce contexte, cette technique consiste à projeter un nuage de points (contraintes exprimées aux points de Gauss du maillage « MAN ») sur une rangée de nœuds (ceux de la facette de normale  $\pm x$  qui représente la section de troncature). Pour tester et comprendre cette procédure, prenons l'exemple simple suivant :

Soit une répartition cylindrique de valeurs  $z(x,y)$  comme exposé dans la figure 6-6 (a) et (b). En utilisant la MLS optimisée par nos soins (cf. annexe 3), on peut obtenir la projection de cette distribution  $z(x,y)$  sur les droites  $\Delta 1$  et  $\Delta 2$  comme le montre la figure 6-6(c).

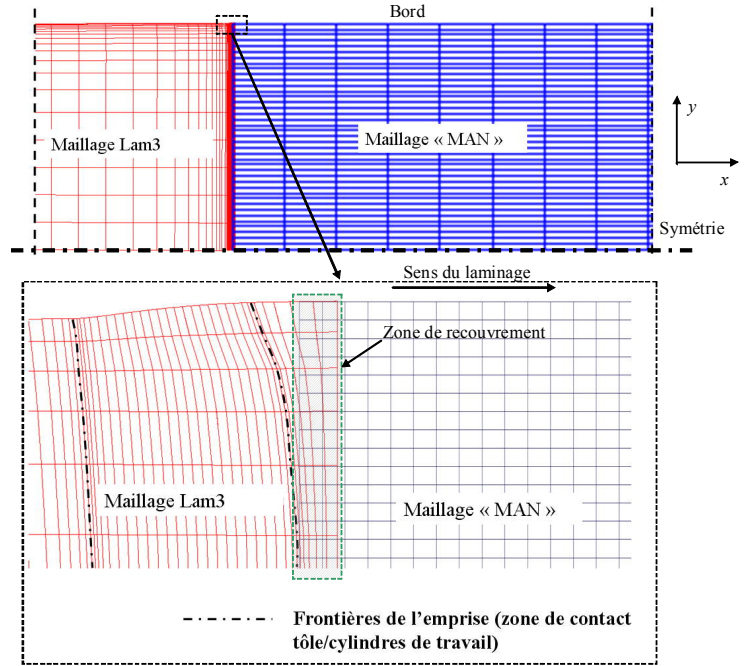


Figure 6-5. Zone de recouvrement entre les deux maillages 3D de Lam3/Tec3 et coque du modèle « MAN » : « cas 1 ».

<sup>12</sup> Les quatre bords du maillage du modèle « MAN » sont désignés dans le chapitre 4. Le bord 1 correspond à la sortie de l'emprise, où on a supposé un encastrement.

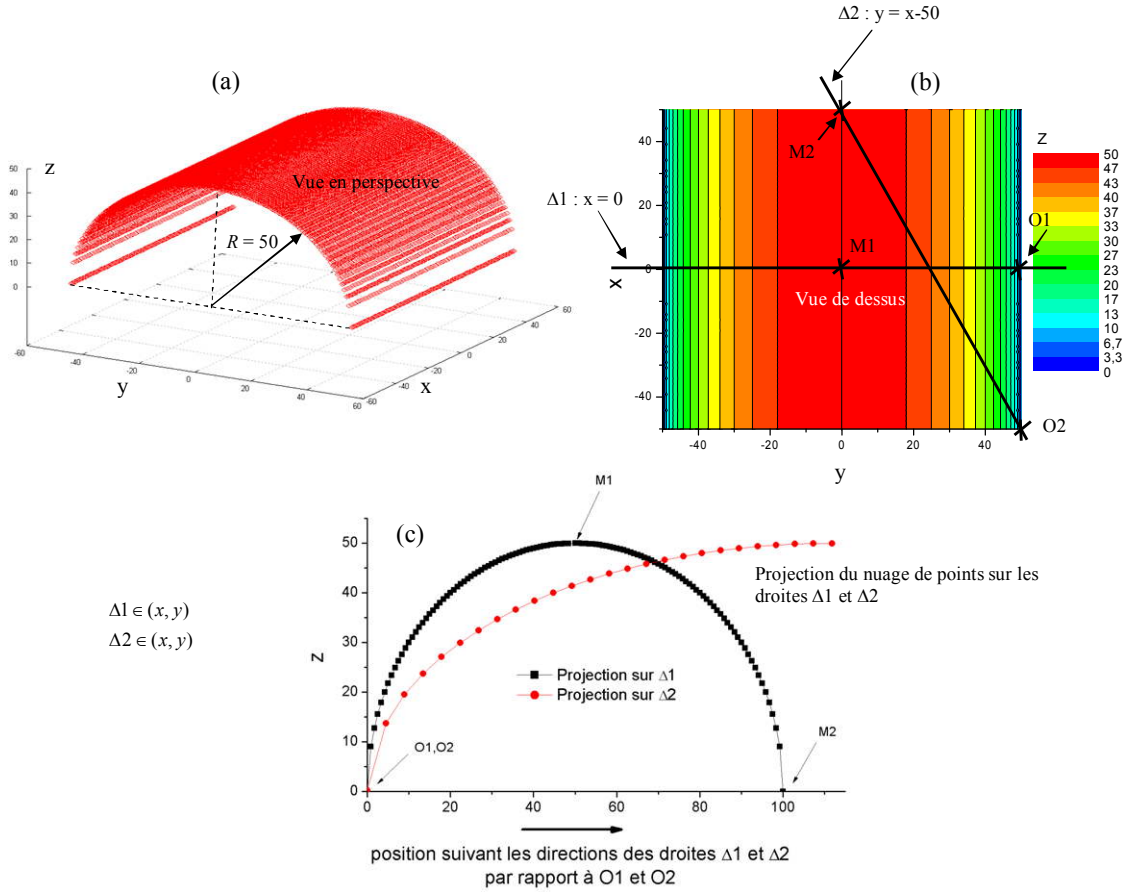


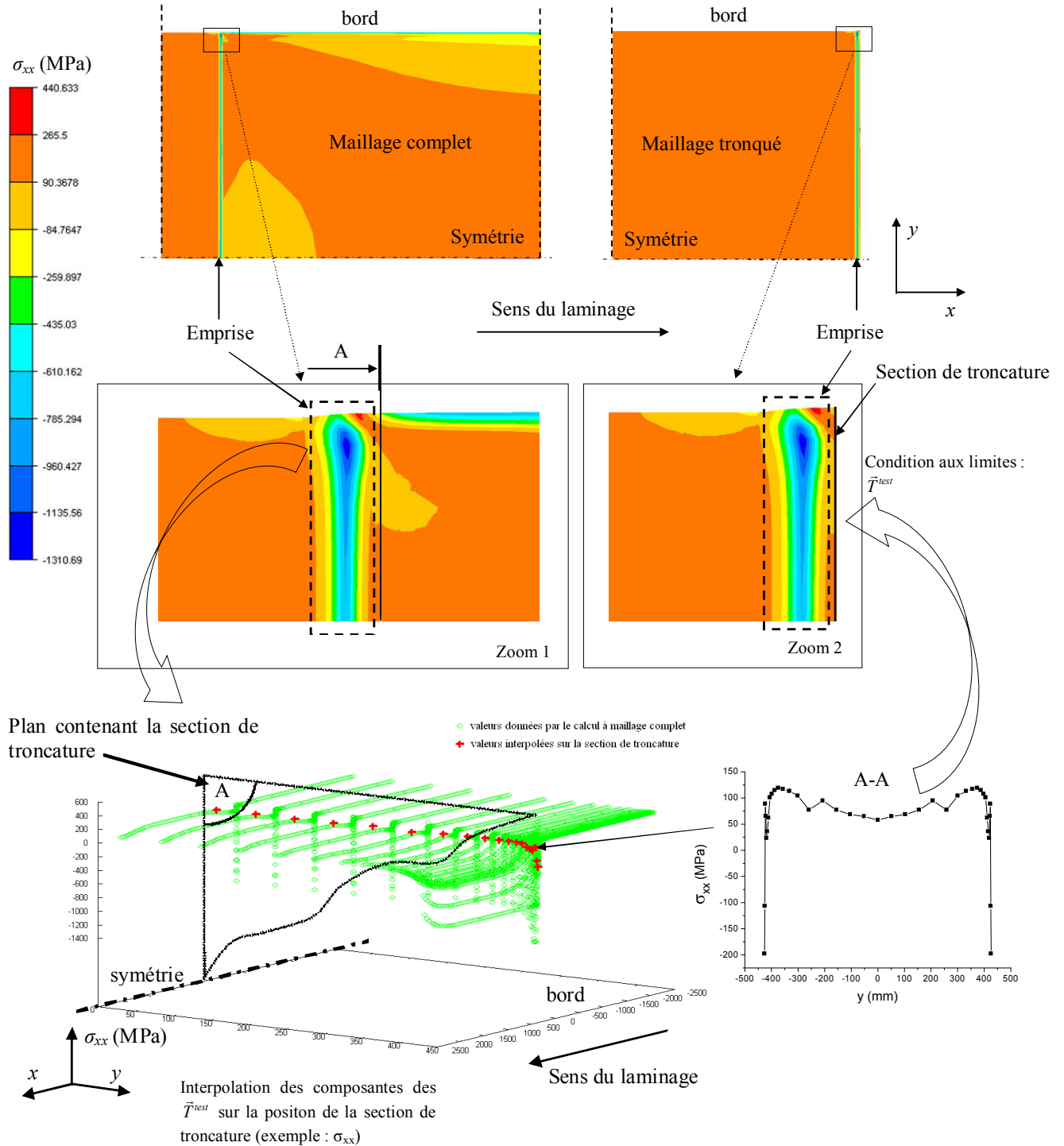
Figure 6-6. Exemple de projection linéique d'un nuage de valeurs.

L'emprise peut être sensible à la moindre variation de  $\vec{T}_{Lam3}^c$  imposée, en amont comme en aval. De ce fait, la moindre erreur commise dans le calcul de ce vecteur, risque de fausser les résultats, voire conduire à la divergence du calcul couplé Lam3/Tec3-MAN. Pour cette raison, la MLS utilisée doit garantir une précision suffisante dans le calcul de  $\vec{T}_{Lam3}^c$ . D'ailleurs, interpoler les composantes de ce vecteur à partir d'un champ de contraintes issu d'un calcul de flambage « MAN », est loin d'être aussi simple que l'exemple qu'on vient de traiter. Dans un cas réel de laminage, les distributions de contraintes issues d'un calcul « MAN » sont plus complexes, présentant de fortes variations qui accentuent les erreurs d'interpolation.

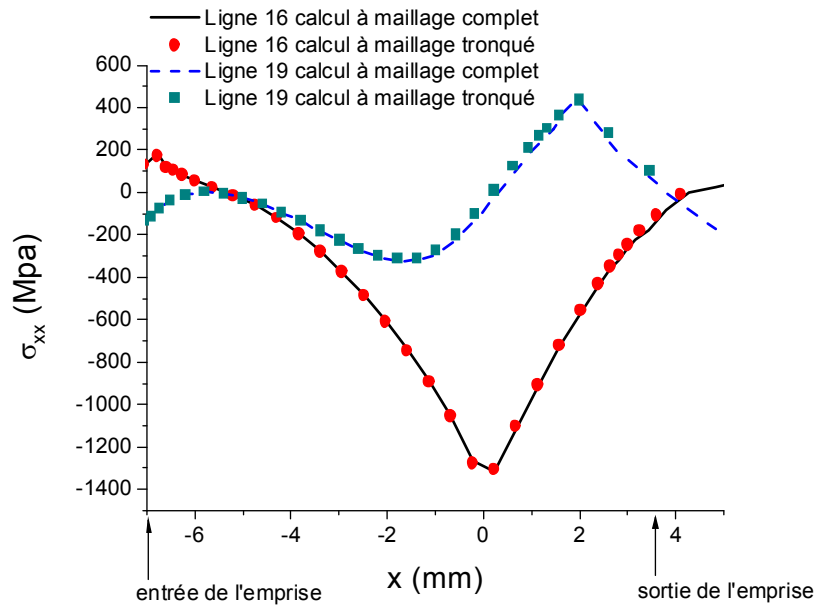
Pour tester l'efficacité de la MLS adoptée vis-à-vis de l'interpolation des composantes du vecteur  $\vec{T}_{Lam3}^c$ , un deuxième test a été réalisé :

On considère le calcul à maillage complet réalisé pour le « cas 1 » à l'aide de Lam3/Tec3 standard ; les résultats ont été exposés en détail dans le chapitre 3. Pour le même cas, on effectue un deuxième calcul à maillage tronqué à quelques millimètres en aval de l'emprise (cf. figure 6-7). Ici, on impose un vecteur contrainte  $\vec{T}^{test}$  en tant que condition aux limites en traction aval sur la section de troncature. Les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{xz}$  de ce vecteur - contrainte  $\vec{T}^{test}$  sont déduites par interpolation des contraintes aux points d'intégration du maillage complet du premier calcul du même cas. Cette phase correspond à la troisième étape de l'algorithme de couplage Lam3/Tec3-MAN (cf. figure 6-4), sauf qu'ici  $\sigma_{MAN}$  est remplacé par les contraintes du calcul de la première étape de ce même algorithme (i.e. calcul à maillage complet). Si la MLS utilisée est assez précise, les résultats obtenus dans le premier (calcul à maillage complet) et le deuxième calcul de ce test (calcul à maillage tronqué), en particulier dans l'emprise, doivent être identi-

ques. La figure 6-7 le confirme, ce qui prouve que la façon de coupler Lam3/Tec3 et le modèle « MAN » est correcte. En comparant de plus près les résultats des deux calculs sur la figure 6-8, on note que la contrainte  $\sigma_{xx}$  donnée par le calcul à maillage complet est identiquement reproduite dans le calcul à maillage tronqué.



**Figure 6-7.** Procédure utilisée pour reproduire les résultats d'un calcul de Lam3/Tec3 standard à maillage complet dans un calcul Lam3/Tec3 standard à maillage tronqué pour le « cas 1 ».



**Figure 6-8.** Évolution de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  le long de deux lignes de courant données par Lam/Tec3 standard pour le « cas 1 » : comparaison entre les résultats des calculs à maillage complet et à maillage tronqué en aval de l'emprise.

### 6.3 Applications : Modélisation des défauts de planéité en laminage à l'aide de l'approche couplée Lam3/Tec3-MAN

À titre d'application, nous avons repris les deux cas : « cas 1 » et « cas 2 ». Le modèle couplé Lam3/Tec3-Counhaye a montré que ces deux cas font partie de deux configurations différentes : dans l'un, l'emprise n'est pas influencée par le flambage (« cas 1 ») ; dans l'autre, la prise en compte du flambage a significativement changé les résultats, y compris dans l'emprise (« cas 2 »). Les résultats ont été détaillés dans le chapitre 3.

L'utilisation de Lam3/Tec3-MAN couplé, dans ce paragraphe, cherche à répondre à deux types de question :

- les deux approches couplées Lam3/Tec3-Counhaye et Lam3/Tec3-MAN aboutissent-elles aux mêmes conclusions sur l'interaction flambage / emprise ?
- comment les résultats de l'approche couplée Lam3/Tec3-MAN se comparent-ils aux mesures expérimentales, et que révèle-t-elle sur les défauts de planéités manifestes ?

#### 6.3.1 Analyse dans l'emprise

##### 6.3.1.i Interaction entre l'emprise et le flambage

Pour le « cas 1 », la figure 6-9 montre les évolutions dans l'emprise de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  le long de deux lignes de courant (n°16 et n°19, cf. figure 3-11). On constate que le flambage est sans influence sur l'emprise, puisqu'à cet endroit les contraintes  $\sigma_{xx}$ , ainsi que les autres variables d'état données par Lam3/Tec3-MAN (avec flambage) et Lam3/Tec3-standard (sans flambage) sont identiques. De même pour le « cas 2 », sur la figure 6-10 est tracée l'évolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  ; le long du bord de la tôle, cette contrainte, comme d'autres variables, est significativement modifiée par le flambage, qui a donc des effets significatifs sur l'emprise dans ce « cas 2 », plus spécialement près de la rive.



### 6.3.1.ii Comparaison entre les modèles Lam3/Tec3-MAN et Lam3/Tec3-Counhaye par rapport aux effets du flambage sur l'emprise

Comparons maintenant les résultats des deux couplages Lam3/Tec3-MAN et Lam3/Tec3-Counhaye. Pour le « cas 1 », les deux modèles s'accordent sur le fait que le flambage n'interagit pas avec l'emprise ; leurs résultats dans l'emprise coïncident d'ailleurs avec ceux de Lam3/Tec3-standard (cf. figure 6-9). Fait plus remarquable, même pour le « cas2 » où on a détecté une interaction du flambage avec l'emprise, Lam3/Tec3-MAN et Lam3/Tec3-Counhaye sont en accord (cf. figure 6-10).

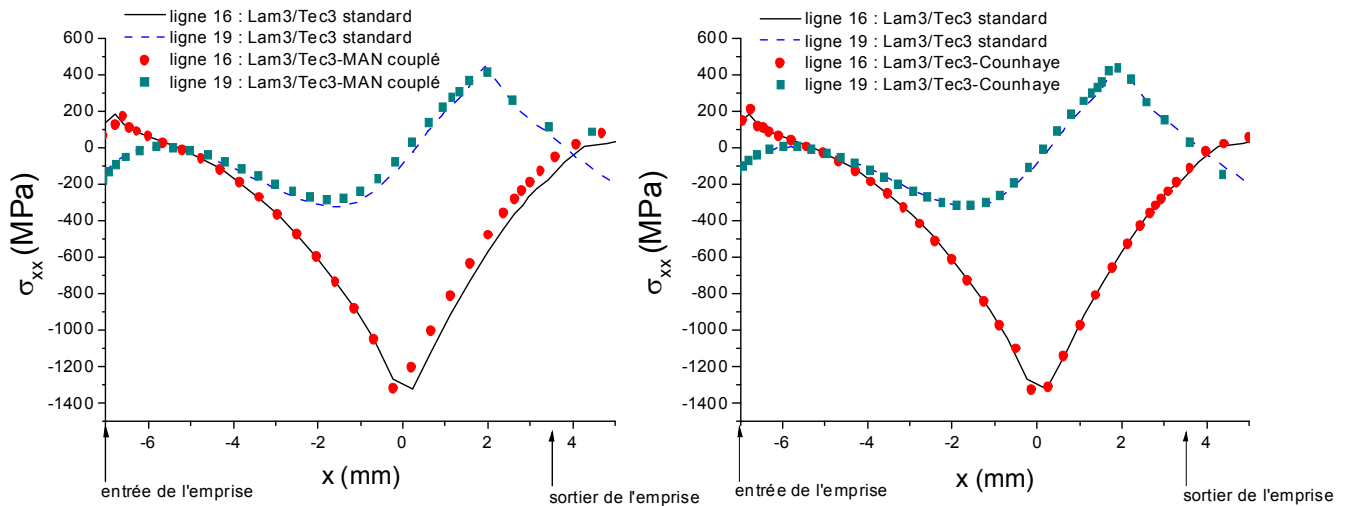


Figure 6-9. Évolution de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  le long de deux lignes de courant : comparaisons entre Lam3/Tec3 standard, Lam3/Tec3-MAN couplé et Lam3/Tec3-Counhaye pour le « cas 1 ».

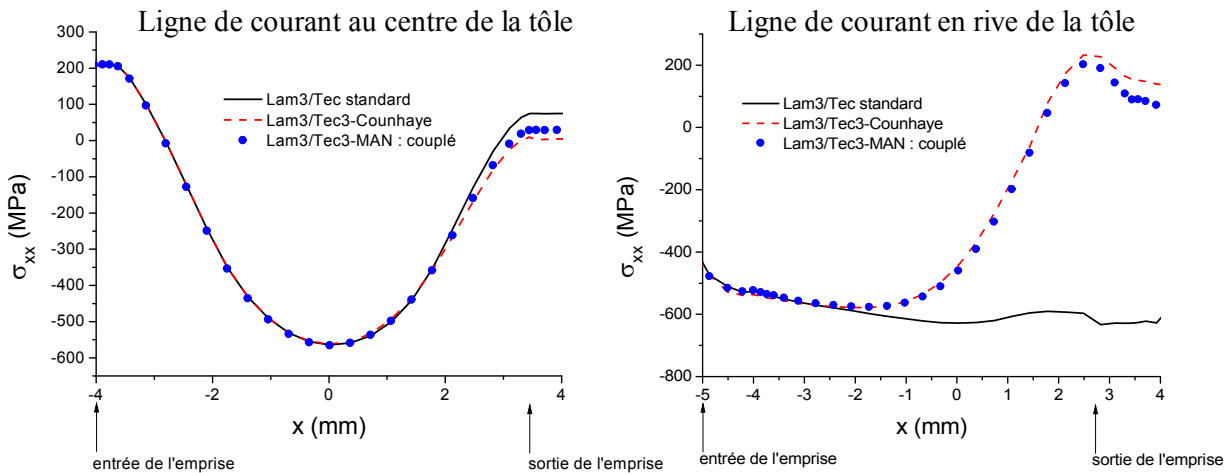
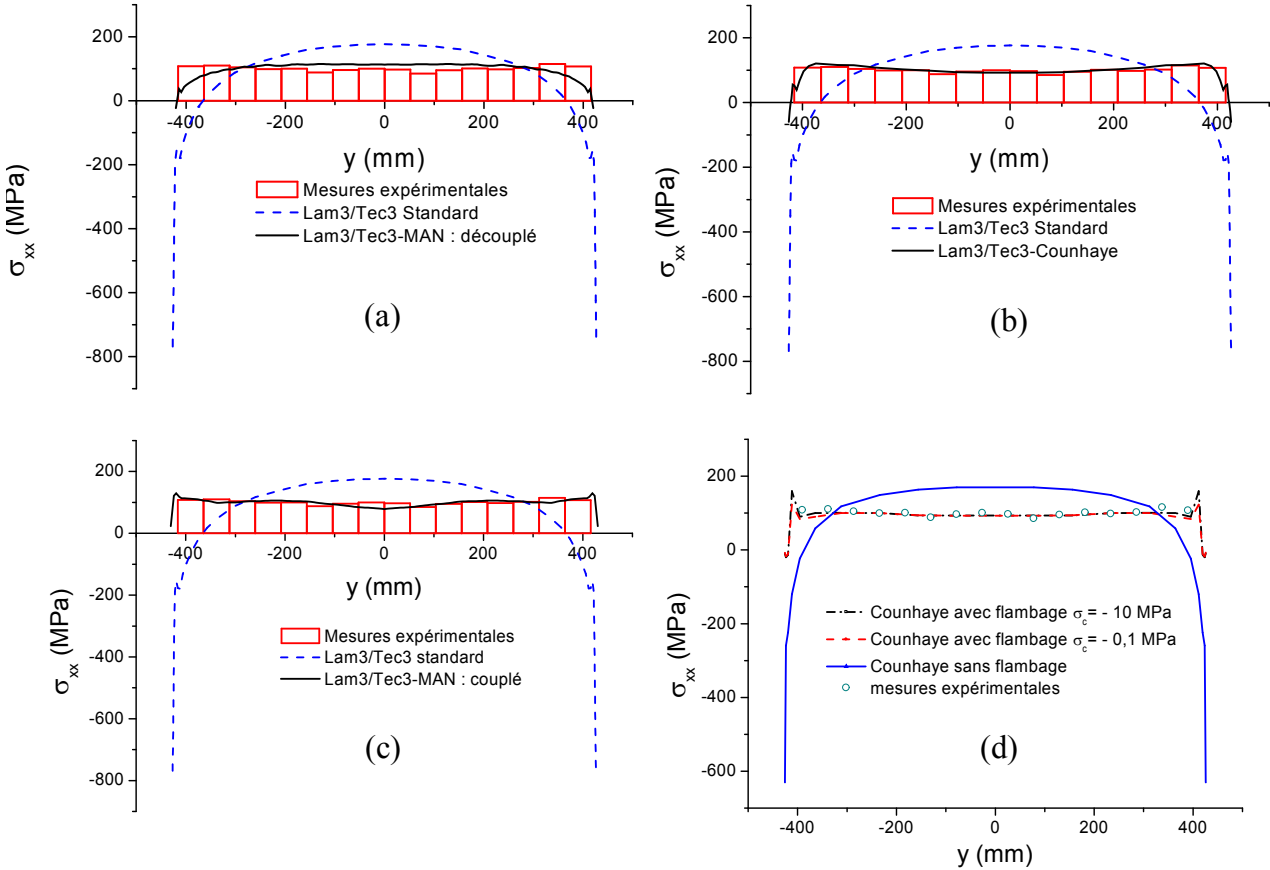


Figure 6-10. Évolution de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  le long du bord et du centre de la tôle : comparaison entre les résultats donnés par les modèles couplés Lam3/Tec3-MAN, Lam3/Tec3-Counhaye et ceux donnés par Lam3/Tec3 standard pour le « cas 2 ».



### 6.3.2 Comparaison avec les mesures expérimentales et les défauts de planéité manifestes détectés

Les figures 6-11-(c) et 6-12 reportent les profils transversaux des contraintes  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage aval (mesure de planéité latente) respectivement pour le « cas 1 » et le « cas 2 ». Ces profils montrent que les contraintes hors emprise sont relaxées et s'approchent des mesures expérimentales quand le flambage est pris en compte. On avait déjà constaté cet effet par l'approche Lam3/Tec3-MAN découplée. Ici, on voit que le modèle Lam3/Tec3-MAN couplé donne des résultats plus proches de l'expérience (figure 6-11-(a) et (c)), sans toutefois faire aussi bien que le modèle couplé Lam3/Tec3-Counhaye. Ce dernier reste le plus proche des profils mesurés dans les deux cas, mais plus nettement pour le « cas 2 » (comparer les figures 6-12 et 3-22).



**Figure 6-11. Modification des profils transversaux de  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage pour le « cas 1 », lorsque le flambage est modélisé : (a) Lam3/Tec3-MAN découplé ; (b) Lam3/Tec3-Counhaye ; (c) Lam3/Tec3-MAN couplé ; (d) le modèle de laminage de Counhaye [5].**

Passons donc aux défauts de planéité manifestes, puisque c'est là que se manifeste le mieux l'avantage de Lam3/Tec3-MAN. On voit sur la figure 6-13 que sous traction (au cours du laminage), la tôle dans le « cas 1 » est presque plate, à part des plis locaux en sortie d'emprise. En analysant la distribution du défaut latent ( $\sigma_{xx}-P$ ), figure 6-14-(a), on peut prédire en même temps un défaut en centre long et en bords longs, puisqu'à ces endroits la grandeur  $\sigma_{xx}-P$  est négative. Effectivement, après le relâchement de la traction  $P$ , le modèle Lam3/Tec3-MAN couplé montre simultanément :

- un défaut de bords longs, concernant une faible largeur (de 30 à 40 mm en rive), et de courte longueur d'onde, 150 mm, mais d'amplitude significative (2 mm) ; ce défaut n'apparaît qu'à une certaine distance (180 mm environ) après l'emprise ;
- un centre long démarrant juste en sortie d'emprise, de longueur d'onde 500 mm et d'amplitude 4 mm.

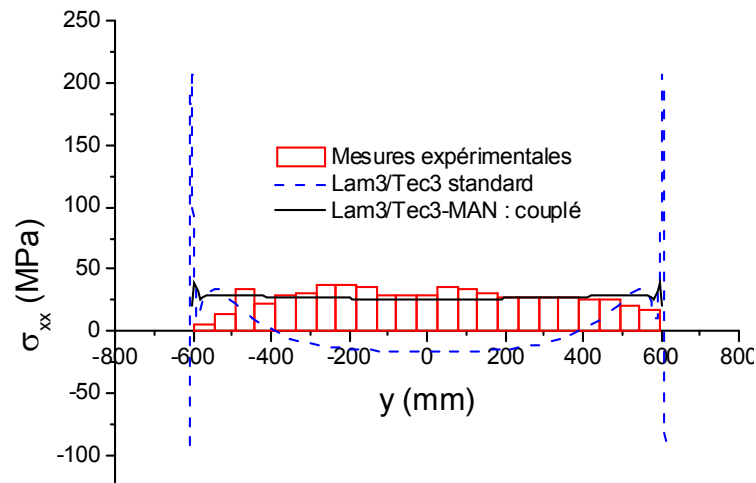


Figure 6-12. Profils transversaux de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage donnés par Lam3/Tec3 standard, Lam3/Tec3-MAN couplé et les mesures expérimentales (« cas 2 »).

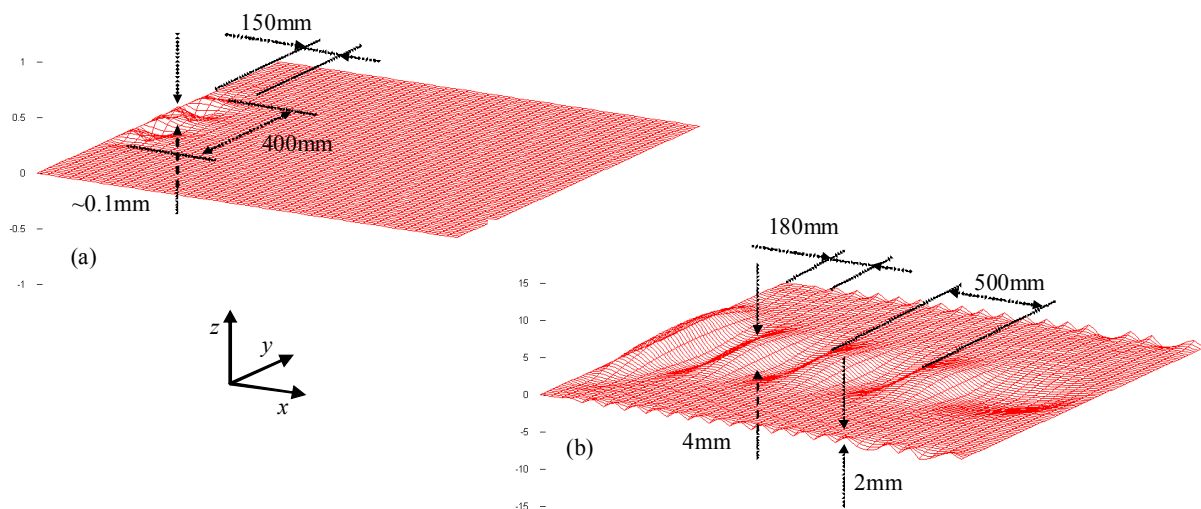
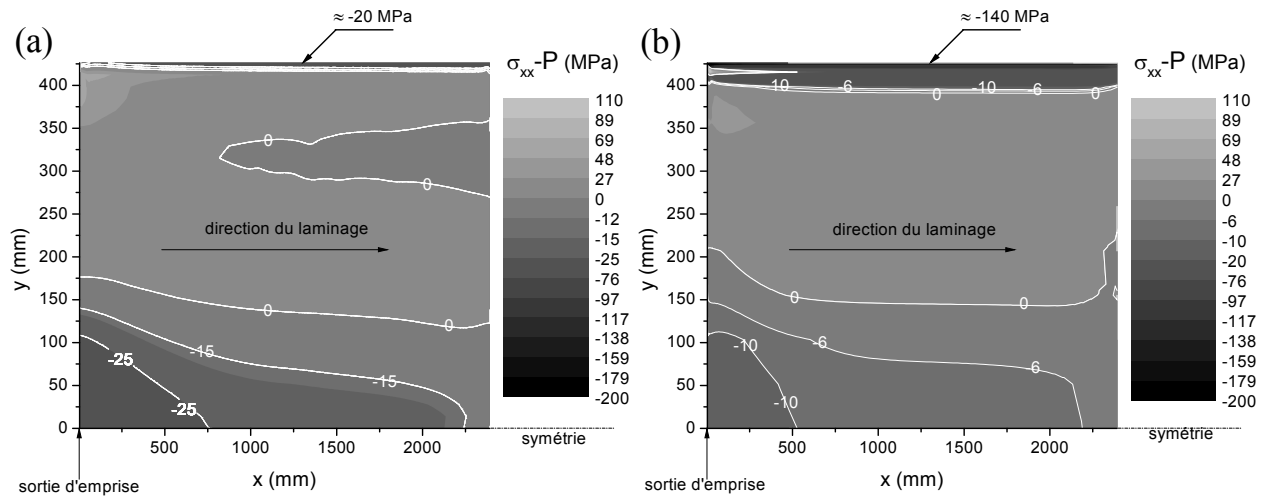
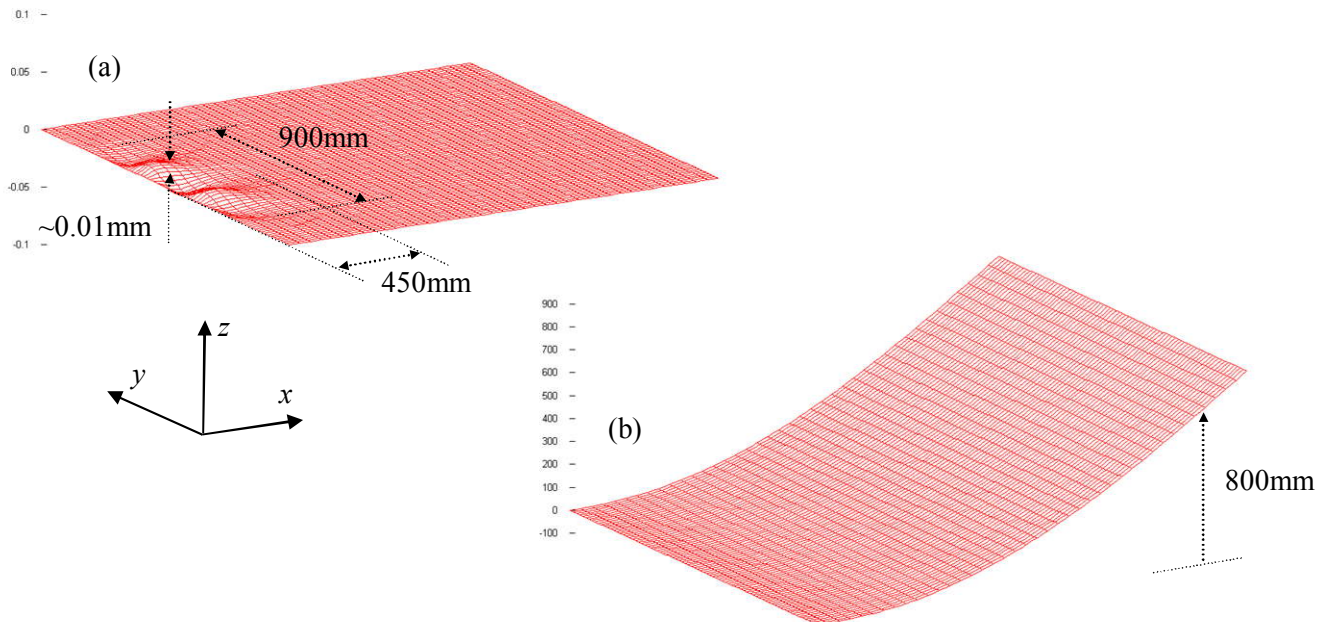


Figure 6-13. Défauts de planéité de la tôle laminée, « cas1 », donnés par le modèle couplé Lam3/Tec3-MAN : (a) au cours du laminage, (b) après le relâchement de la traction.

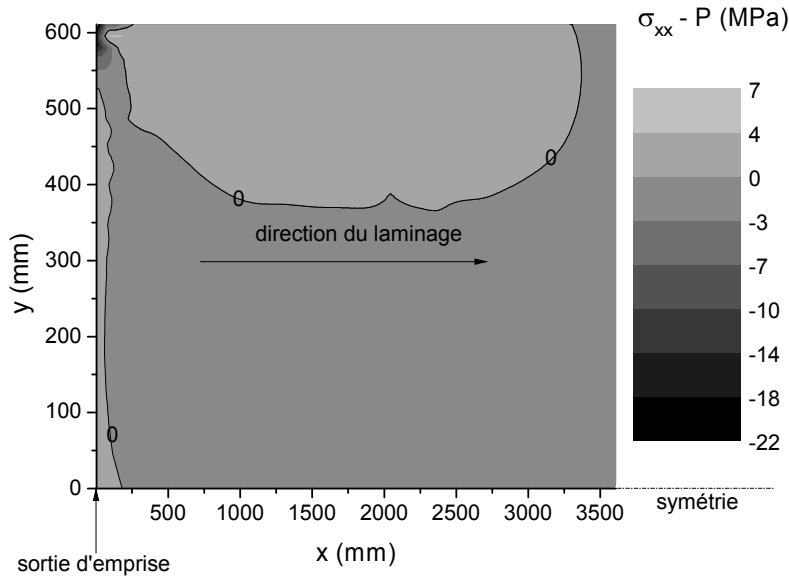


**Figure 6-14. Défauts latents ( $\sigma_{xx}-P$ ) donnés par Lam3/Tec3-MAN couplé (a) et Lam3/Tec3-Counhaye (b) pour le « cas 1 » : tableau 1.**

Quant au « cas 2 » (très faible réduction), au cours du laminage, la tôle ne présente pas de défauts apparents, sauf les plis longitudinaux en sortie d'emprise, de très faible amplitude comme le montre la figure 6-15. Sur cette même figure, on remarque qu'après relâchement de la traction  $P$ , cette tôle flambe selon un mode global (cintre). Contrairement aux défauts locaux obtenus dans le « cas 1 », ce type de défauts ne représente pas un grand problème de planéité, puisqu'ils peuvent être facilement éliminés par l'opération de décintrage par exemple. D'ailleurs, sur la figure 6-16, on voit bien que pour ce cas, les défauts de planéité latents ( $\sigma_{xx}-P$ ) ne sont pas locaux, ce qui explique que l'on n'ait pas de défauts manifestes locaux et non développables après le relâchement de la tôle.



**Figure 6-15. Défauts de planéité en laminage, « cas 2 », donnés par le modèle couplé Lam3/Tec3-MAN : (a) au cours du laminage, (b) après le relâchement de la traction.**



**Figure 6-16. Défaut latent ( $\sigma_{xx}-P$ ) donnés par Lam3/Tec3-MAN couplé pour le « cas 2 » (tableau 2).**

### 6.3.3 Position du modèle couplé Lam3/Tec3-MAN par rapport à Lam3/Tec3-Counhaye et Lam3/Tec3-MAN découplé

Le « cas 1 » fait partie de ceux où l’emprise n’est pas influencée par le flambage. De ce fait, on aurait pu penser que le calcul de flambage (calcul « MAN ») et le calcul Lam3/Tec3-standard pourraient être intuitivement effectués séparément : l’approche *découplée* Lam3/Tec3-MAN devrait suffire et aboutir aux mêmes résultats que Lam3/Tec3-MAN *couplée*. Pourtant, leurs résultats sont sensiblement différents, il n’est que de comparer les figures 5.2 et 6.13. On a tendance à considérer que Lam3/Tec3-MAN couplé est plus précis que l’approche Lam3/Tec3-MAN découplée, puisque plus complet (le modèle Lam3/Tec3-MAN prend en compte le couplage emprise/flambage). Les résultats montrent d’ailleurs bien que Lam3/Tec3-MAN couplé approche mieux les mesures expérimentales ( $\sigma_{xx}(y)$  stabilisée), et s’accorde avec le modèle couplé Lam3/Tec3-Counhaye sur le fait que les contraintes sous emprise sont ou non influencées par la prise en compte du flambage (cf. figures 6-9 et 6-10).

Il semble donc que le *couplage* entre la mécanique de l’emprise et le flambage hors emprise soit nécessaire, que le changement sous emprise semble « significatif » ou non. De fait, le mode de flambage d’une tôle très fine est sensible à quelques MPa près, et les différences entre les modèles, même s’ils semblent tous converger vers les mêmes profils au loin, montrent localement des différences de quelques dizaines de MPa.

Par rapport à Lam3/Tec3-Counhaye, on rappelle que les comparaisons ne peuvent se faire qu’au cours du laminage (tôle sous traction). On a pu observer des ressemblances qualitatives des cartes de  $\sigma_{xx}$  (ou de la planéité latente  $\sigma_{xx}-P$  : cf. figure 6-14). Pour les défauts manifestes, les résultats des deux modèles sont proches dans deux configurations bien différentes. Dans le calcul couplé de Lam3/Tec3-Counhaye, on a détecté un défaut en bords longs au cours du laminage (cf. figure 5-3-(d)). Cependant, avec le calcul de flambage MAN, couplé ou découplé, ce défaut ne se retrouve qu’au moment où la tôle est relâchée (cf. figure 6-13-(b)). En outre, un défaut en centre long apparaît en même temps dans les résultats de Lam3/Tec3-MAN couplé seulement, une différence majeure par rapport à Lam3/Tec3-MAN découplé et Lam3/Tec3-Counhaye.

Que penser du fait que seul LAM3/Tec3-Counhaye prédit un bord long sous traction ? Dans le chapitre 3, on a montré que même si le flambage est pris en compte dans le modèle Lam3/Tec3-

Counhaye, il ne permet pas dans le « cas 1 » de relaxer les contraintes partout dans la tôle : la relaxation de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  ne se fait pas dès la sortie de l'emprise, mais graduellement en aval. C'est le principal désaccord avec les résultats de Counhaye [5]. Examinons ce point de plus près, en nous référant aux résultats du modèle couplé Lam3/Tec3-MAN.

La figure 6-17 retrace les évolutions de  $\sigma_{xx}$  le long du bord pour les trois modèles : modèle de Counhaye (version [5]), Lam3/Tec3-Counhaye et Lam3/Tec3-MAN couplé. En comparant les courbes, on s'aperçoit que les résultats du modèle couplé Lam3/Tec3-MAN, considéré comme référence, sont en faveur de la version de Counhaye [5]<sup>13</sup>. Lam3/Tec3-Counhaye peut donc être jugé imprécis au voisinage de l'emprise, du moins pour le « cas 1 », mais les profils de contraintes loin de l'emprise qu'il fournit sont en très bon accord avec les seules données expérimentales.

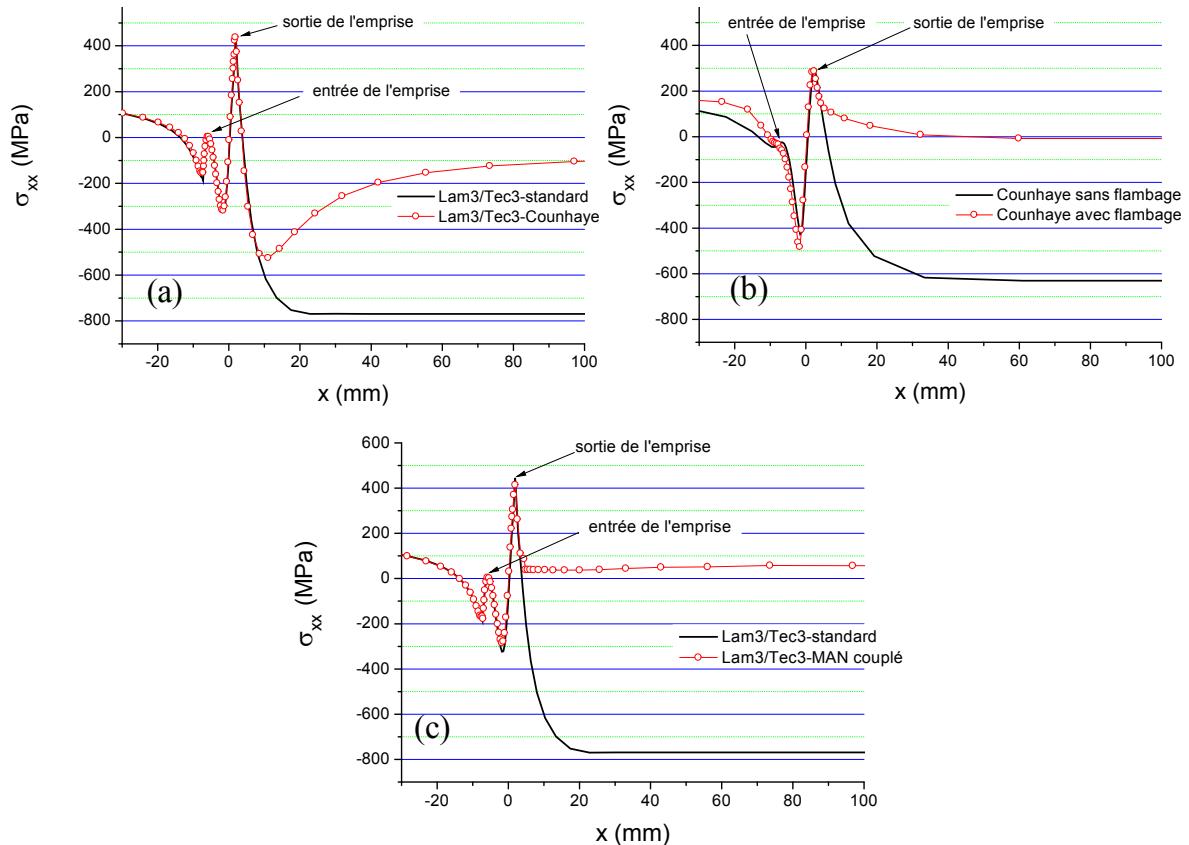


Figure 6-17. Comparaisons de l'évolution de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  le long du bord, sans et avec flambage, donnée par les différents modèles (« cas1 »): Lam3/Tec3-standard, Lam3/Tec3-MAN, Lam3/Tec3-Counhaye et le modèle de Counhaye [5].

## 6.4 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre constitue un couplage itératif entre Lam3/Tec3 et le modèle de flambage « MAN ». La difficulté majeure de ce couplage vient de la différence de nature des maillages des deux modèles : éléments hexaédriques 3D d'une part (Lam3/Tec3), coques d'autre part (« MAN »). On a donc fait appel à une technique basée sur la méthode des moindres carrés mobiles (MLS), qui a permis de relier les deux maillages dans le cadre d'un couplage en contrainte (respectant la continuité des contraintes en passant d'un maillage à l'autre). Une fois réalisé, le modèle de laminage couplé Lam3/Tec3-MAN a été utilisé pour des applications diver-

<sup>13</sup> Ce point reste à confirmer par d'autres travaux.

ses. Nous en avons détaillé ici deux exemples représentatifs : « cas 1 » et « cas 2 », qui font partie de deux familles de cas différents : le « cas 1 » et le « cas 2 » représentent respectivement les cas sans et avec interaction emprise/flambage.

En utilisant le modèle Lam3/Tec3-MAN qui prend en compte le couplage emprise/flambage pour les deux cas mentionnés, on a pu tirer les conclusions suivantes :

- le degré de rétroaction du flambage sur l'emprise (état de contrainte dans l'emprise, déformation de la cage) est trouvé identique par Lam3/Tec3-Counhaye et par Lam3/Tec3-MAN, c'est-à-dire par les deux modèles couplés.
- Le flambage redistribue les contraintes hors emprise, qui sont de ce fait trouvées en bon accord avec les mesures expérimentales.
- Lam3/Tec3-MAN quantifie les défauts de planéité et caractérise leurs géométries.

Soit  $T_{CPU}$  le temps de calcul mis pour un cas donné avec Lam3/Tec3 standard, sur une machine « Windows » avec un processeur « Intel » de 2 GHz. Le tableau 6-1 compare des ordres de grandeur de coût de calcul pour les quatre modèles Lam3/Tec3 standard, Lam3/Tec3-Counhaye, Lam3/Tec3-MAN découplé et Lam3/Tec3-MAN couplé. Le temps de calcul du modèle couplé Lam3/Tec3-MAN est deux à trois fois plus long que Lam3/Tec3-Counhaye. Il reste d'un ordre de grandeur acceptable (de l'ordre de vingt à trente heures) pour un modèle de référence pour études de compréhension, dont on attend plus de précision que de rapidité. Mais il gagnerait à être fortement diminué dans l'optique de campagnes de calcul nécessaires à la mise au point de gammes de laminage.

Cette comparaison préliminaire, sur les quelques cas traités dans cette thèse, mériterait évidemment une étude plus poussée dans le futur.

Modèle	Temps de calcul (CPU)
Lam3/Tec3 standard	$T_{CPU}$
Lam3/Tec3-Counhaye	$(1.2 \text{ à } 1.5) \times T_{CPU}$
Lam3/Tec3-MAN découplé	$(1.1 \text{ à } 1.2) \times T_{CPU}$
Lam3/Tec3-MAN couplé	$(3 \text{ à } 4) \times T_{CPU}$

**Tableau 6-1. Récapitulatif du coût de calcul en CPU des différents modèles : Lam3/Tec3 standard, Lam3/Tec3-Counhaye, Lam3/Tec3-MAN découplé et Lam3/Tec3-MAN couplé.**

## Conclusion générale et perspectives

### Conclusion générale

Ce travail est une première tentative de construction d'un modèle de laminage capable de décrire avec précision les défauts de planéité des tôles minces, en prenant en compte les couplages tôle - cylindres et emprise - flambage (cf. § 2.1). Nous sommes parti d'une version standard de Lam3/Tec3 (Lam3/Tec3-Standard), modèle de laminage développé par le Cemef, ArcelorMittal et Alcan. Le couplage tôle - cylindres y est déjà pris en compte, mais cela ne suffit pas. Nous avons vu au chapitre 3 que faute d'intégrer une analyse de post-flambement hors emprise sous contraintes résiduelles, cette version standard donne dans certains cas des résultats bien loin des mesures expérimentales, les profils de contrainte longitudinale mesurés à mi-intercage par les rouleaux de planéité [65]. Pour perfectionner Lam3/Tec3, nous avons choisi de le compléter par un modèle de flambage de coques. La littérature montre qu'à l'heure actuelle, ces modèles sont les mieux adaptés pour décrire le flambage des plaques, donc la planéité des tôles laminées.

Nous disposons par ailleurs d'un modèle EF de flambage de coques sous contraintes résiduelles, « MAN ». Ce modèle a paru suffisamment puissant, suite à des tests de validation par comparaison avec des résultats analytiques [61] et un logiciel commercial (Abaqus®). Il est d'une précision satisfaisante pour le calcul de flambage, même dans les cas de chargements et de modes de flambage complexes, comme on risque de les rencontrer en laminage. De plus, le modèle « MAN » est capable d'effectuer le calcul de post-flambage. C'est avec ce modèle que nous avons complété Lam3/Tec3.

En laminage, si une rétroaction entre le flambage hors emprise et l'emprise existe, le couplage entre Lam3/Tec3 et le modèle « MAN » est obligatoire. En revanche, la différence entre les mailages et les formulations utilisés par les deux modèles rend le couplage assez laborieux. Ce couplage aurait pu ne pas être nécessaire, si on avait montré que la rétroaction emprise - flambage est négligeable en laminage. Dans ce cas, l'approche découplée fondée sur un simple chaînage entre les deux modèles, détaillée dans le chapitre 5, aurait pu être suffisante.

Avant de nous lancer dans le couplage de Lam3/Tec3 et du modèle « MAN », nous avons donc commencé par une approche couplée mais simplifiée, pour examiner ces questions de rétroaction, en nous inspirant du travail de Counhaye [5] ; le modèle de laminage ainsi obtenu s'appelle Lam3/Tec3-Counhaye (cf. chapitre 3). Nous l'avons validé par comparaison à l'expérience, et il nous a montré que dans certains cas au moins, l'interaction emprise - flambage est importante. Ainsi, pour construire un modèle de laminage général, il faut bien coupler Lam3/Tec3 avec le modèle « MAN ».

Nous avons décrit dans le chapitre 6 le développement qui a permis de coupler Lam3/Tec3 avec le modèle « MAN » (Lam3/Tec3-MAN couplé). Ce couplage est basé sur un schéma itératif entre les deux modèles (cf. figure 6-4). Il donne la possibilité de simuler le procédé de laminage en calculant :

- la déformation de la cage ;
- la zone de contact tôle-cylindres et l'état de la tôle dans l'emprise ;
- l'état post-flambé de la tôle (défauts de planéité manifestes) et la distribution des champs de contraintes dans la tôle hors emprise (défauts de planéité latents) au cours du laminage.

Il est également possible de calculer l'état de la tôle dans un état détendu (représentant en première approximation son état après découpe). Pour cela, on part de l'état de la tôle calculé par Lam3/Tec3-MAN couplé (état sur la ligne de laminage). Ensuite, on effectue séparément un calcul de post-flambage avec le modèle « MAN », en relâchant les efforts de traction de laminage appliqués à la tôle (cf. § 4.3.4).

Les comparaisons avec l'expérience ont montré que le couplage rapproche les résultats des mesures expérimentales. Dans l'emprise, Lam3/Tec3-MAN couplé et Lam3/Tec3-Counhaye donnent quasiment les mêmes résultats, que l'interaction emprise – flambage soit faible ou forte. Cela peut être considéré comme une forme de validation des deux modèles.

Même si nous sommes parvenus à construire le modèle couplé Lam3/Tec3-MAN, finalité de cette thèse, l'approche découplée (Lam3/Tec3-MAN découplé) méritait quand même d'être testée. En effet, on pourrait penser que pour les cas où l'interaction emprise - flambage est très faible, l'approche découplée par chaînage entre Lam3/Tec3 et le modèle « MAN » (Lam3/Tec3-MAN découplé) serait idéale, car plus simple et plus rapide que l'approche Lam3/Tec3-MAN couplée. Mais d'une part, nous ne sommes pas en mesure de déterminer a priori quels cas relèvent de cette catégorie ; d'autre part, on ne peut utiliser cette approche plus rapide que si on prouve que pour un cas à faible interaction emprise - flambage, Lam3/Tec3-MAN couplé et Lam3/Tec3-MAN découplé donnent les mêmes résultats. Or des tests ont montré le contraire, pour ce qui est des modes de flambage. Ainsi, considérant que Lam3/Tec3-MAN couplé est un modèle de référence, nous sommes amené à renoncer à l'utilisation de l'approche découplée : un modèle de laminage précis et général doit prendre en compte :

- le couplage tôle-cylindres (emprise) ;
- le couplage emprise-flambage.

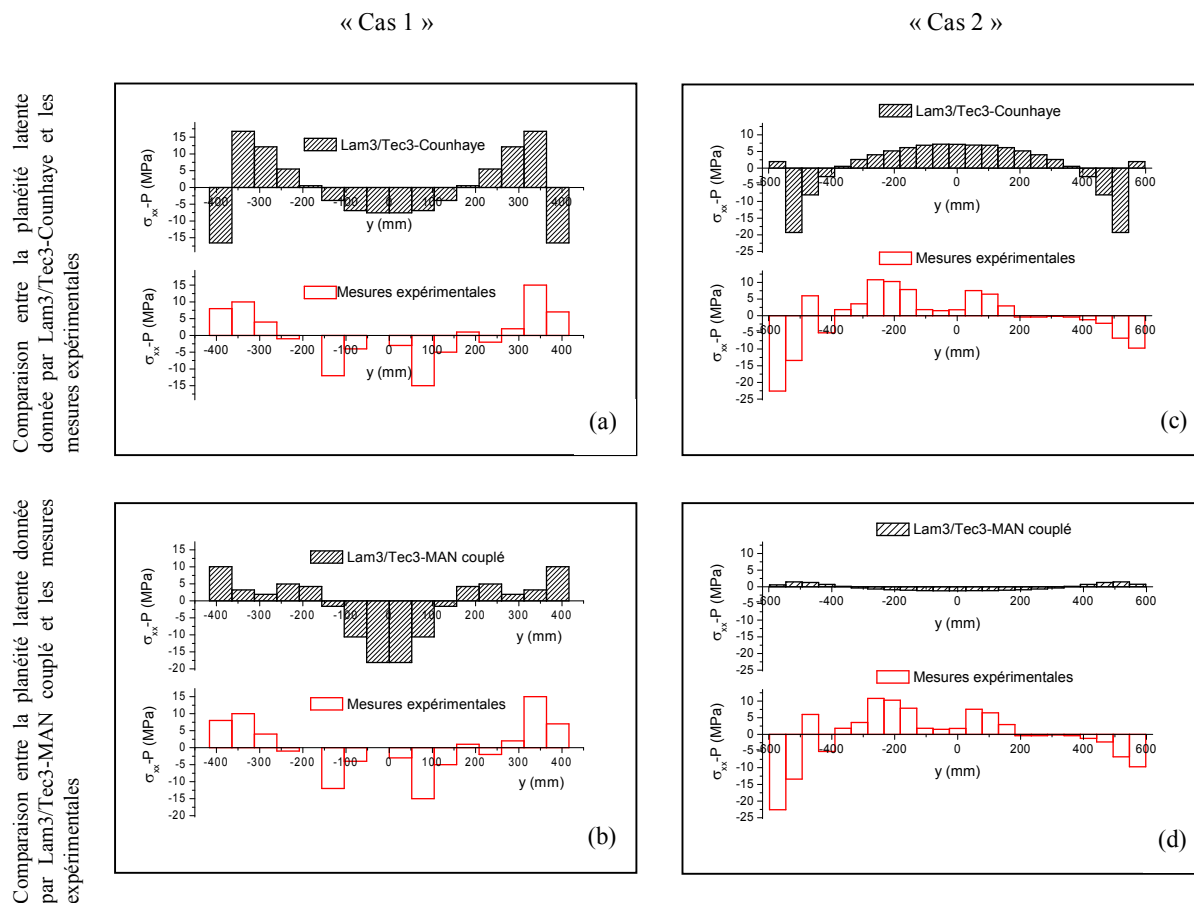
Enfin, à l'issue de cette thèse, nous disposons de deux modèles de laminage dans lesquels le couplage tôle - cylindres et emprise - flambage sont pris en compte : Lam3/Tec3-Counhaye et Lam3/Tec3-MAN couplé. En comparant ces deux modèles, on peut noter que Lam3/Tec3-MAN couplé est plus riche que Lam3/Tec3-Counhaye pour décrire la géométrie des défauts manifestes. De son côté, Lam3/Tec3-Counhaye est nettement plus rapide. Par rapport aux mesures de profil de contrainte par rouleau de planéité, les deux modèles donnent tous deux des résultats convenables, qu'on peut considérer compatibles avec la précision des mesures, Lam3/Tec3-Counhaye donnant des profils un peu plus proches des mesures (comparer les graphes (c) et (d) de la figure ci-dessous). Il est également apparu que ces différences à première vue mineures peuvent conduire à des modes et amplitudes de flambage assez différents, donnant ainsi une importance cruciale au couplage plus ou moins fort.



## Perspectives

Pour une éventuelle suite à ces travaux, nous préconisons dans un premier temps d'approfondir la validation des deux modèles Lam3/Tec3-Counhaye et Lam3/Tec3-MAN couplé, en simulant plus de cas de laminage pour lesquels on dispose de mesures expérimentales, si possible à la fois en défauts manifestes (*Méplaca* : cf. 1.2.4.i-b) et en défauts latents (rouleaux de planéité). La comparaison des deux modèles, en précision des résultats et en temps de calcul, sera enrichissante. Elle confirmera probablement l'importance du couplage post-emprise / emprise, suggérant de revenir sur les techniques de couplage ; des projets sont d'ailleurs en cours.

D'ores et déjà, pour les industriels, ces modèles vont permettre de résoudre certains problèmes rencontrés en ligne et d'enrichir leurs bases de données à l'aide d'études paramétriques portant par exemple sur les effets des efforts des actionneurs, de la vitesse de laminage, de la géométrie des cylindres... Des études sur la régulation de la planéité par les efforts de cambrage (cf. § 1.3.7) à l'aide de Lam3/Tec3-Counhaye viennent d'être lancées à ArcelorMittal [81]. Ces études ont montré que la réponse de la planéité à un « échelon de cambrage » (accroissement de la force de cambrage en cours de laminage) est la même pour les calculs avec ou sans flambage. Ceci doit être vérifié à l'aide de Lam3/Tec3-MAN couplé.



**Planéité latente donnée par les mesures expérimentales et les modèles Lam3/Tec3-MAN couplé et Lam3/Tec3-Counhaye pour les cas de laminage « cas 1 » et « cas 2 » présentés respectivement dans les tableaux 1 et 2 de l'annexe 4. La contrainte moyenne a été soustraite pour pouvoir agrandir l'échelle.**

# **Annexes**

## Annexe 1 : Discrétisation par éléments finis du problème de l'étape 3 du modèle « MAN »

On rappelle que le problème de l'étape 3 s'écrit :

à l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{aligned} & \bullet \int_{\Omega} \left[ \left( \gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) \right)^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[ \tilde{\gamma}_1 : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_1, \delta\xi) d\Omega = \\ & \quad - \lambda_1^{(res)} \int_{\Omega} (S^{res})^t : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) d\Omega \\ & \bullet \int_{\Omega} \left( \gamma^l(\xi_1) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_1) \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\gamma}_1^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = -\lambda_1^{(res)} \int_{\Omega} (S^{res})^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega \end{aligned} \right. \quad (7.1)$$

à l'ordre  $p \geq 2$  :

$$\left\{ \begin{aligned} & \bullet \int_{\Omega} \left[ \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) \right)^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[ \tilde{\gamma}_p : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} S_0^t : 2\gamma^{nl}(\xi_p, \delta\xi) d\Omega = \\ & \quad - \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{p-1} \left( \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right)^t : \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} S_i^t : 2\gamma^{nl}(\xi_{p-i}, \delta\xi) d\Omega \\ & \quad - \lambda_p^{(res)} \int_{\Omega} (S^{res})^t : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \delta\xi) \right) d\Omega \\ & \bullet \int_{\Omega} \left( \gamma^l(\xi_p) + 2\gamma^{nl}(\xi_0, \xi_p) \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\gamma}_p^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = \\ & \quad - \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{p-1} \gamma^{nl}(\xi_i, \xi_{p-i}) \right)^t : \mathbb{C} : \delta\tilde{\gamma} d\Omega - \lambda_p^{(res)} \int_{\Omega} (S^{res})^t : \delta\tilde{\gamma} d\Omega \end{aligned} \right. \quad (7.2)$$

La discrétisation par éléments finis utilisée par le modèle « MAN » est classique. On utilise un élément fini quadratique à huit nœuds avec intégration réduite.

$$\begin{aligned} \{\gamma^c\} &= \{\gamma^l\} + \{\gamma^{nl}\} = \left( [B^l] + \frac{1}{2} [B^{nl}(\hat{\xi})] \right) \{\hat{\xi}\}^{el} ; \text{ soit } [B(\hat{\xi})] = [B^l] + \frac{1}{2} [B^{nl}(\hat{\xi})] \\ \{\delta\gamma^c\} &= [\bar{B}(\hat{\xi})] \{\delta\hat{\xi}\}^{el} ; \text{ soit } [\bar{B}(\hat{\xi})] = [B^l] + [B^{nl}(\hat{\xi})] \\ \{\tilde{\gamma}\} &= [B_{\alpha}] \{\alpha\}^{el} ; \{\delta\tilde{\gamma}\} = [B_{\alpha}] \{\delta\alpha\}^{el} \end{aligned} \quad (7.3)$$

$[B]$  et  $[\bar{B}]$  sont des matrices qui dépendent des dérivées des fonctions d'interpolation et du champ de déplacement  $\{\xi\}$ .  $[B_{\alpha}]$  est la matrice des fonctions de forme de la déformation  $\{\tilde{\gamma}\}$ .  $\{\cdot\}^{el}$  signifie qu'on considère le vecteur élémentaire.  $\hat{\xi}$  et  $\alpha$  sont respectivement les formes discrètes du champ de déplacement et de la déformation additionnelle  $\{\tilde{\gamma}\}$ .

En utilisant (7.3), les systèmes (7.1) et (7.2) sont transformés sous les formes discrètes suivantes :  
à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \left( [K_{\xi\xi}] + [K_{\sigma}] \right) \{\hat{\xi}_1\}^{el} + [K_{\alpha\xi}] \{\alpha_1\}^{el} &= -\lambda_1^{(res)} \{F^{\xi}\}^{el} \\ [K_{\alpha\xi}] \{\hat{\xi}_1\}^{el} + [K_{\alpha\alpha}] \{\alpha_1\}^{el} &= -\lambda_1^{(res)} \{F^{\alpha}\}^{el} \end{aligned} \quad (7.4)$$

à l'ordre  $p$ ,  $1 < p \leq N$  :

$$\begin{aligned} \left( [K_{\xi\xi}] + [K_{\sigma}] \right) \{\hat{\xi}_p\}^{el} + [K_{\alpha\xi}] \{\alpha_p\}^{el} &= -\lambda_p^{(res)} \{F^{\xi}\}^{el} + \{F_p^{nl\xi}\}^{el} \\ [K_{\alpha\xi}] \{\hat{\xi}_p\}^{el} + [K_{\alpha\alpha}] \{\alpha_p\}^{el} &= -\lambda_p^{(res)} \{F^{\alpha}\}^{el} + \{F_p^{nl\alpha}\}^{el} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Tel que :

$[K_{\xi\xi}] = \int_{\Omega_{el}} [\bar{B}]^t [\mathbb{C}] [\bar{B}] d\Omega$	$[K_{\alpha\xi}] = \int_{\Omega_{el}} [B_{\alpha}]^t [\mathbb{C}] [\bar{B}] d\Omega$
$[K_{\alpha\alpha}] = \int_{\Omega_{el}} [B_{\alpha}]^t [\mathbb{C}] [B_{\alpha}] d\Omega$	$[K_{\sigma}] = - \int_{\Omega_{el}} [B^{nl}(\hat{\xi}_p)]^t \{S_0\} d\Omega$
$\{F_p^{nl\xi}\} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{el}} \sum_{i=1}^{p-1} [B^{nl}(\hat{\xi}_{p-i})]^t [\mathbb{C}] [\bar{B}(\hat{\xi}_0)] d\Omega$ $- \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{p-1} [B^{nl}(\hat{\xi}_{p-i})]^t \{S_i\} d\Omega$	$\{F_p^{nl\alpha}\} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{el}} \sum_{i=1}^{p-1} [B^{nl}(\hat{\xi}_{p-i})]^t [\mathbb{C}] [B_{\alpha}] d\Omega$
$\{F^{\xi}\} = \int_{\Omega_{el}} [\bar{B}]^t \{S^{res}\} d\Omega$	$\{F^{\alpha}\} = \int_{\Omega_{el}} [B_{\alpha}]^t \{S^{res}\} d\Omega$

Les systèmes (7.4) et (7.5) peuvent être condensés pour devenir :

à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \left( [K_{\xi\xi}] + [K_{\sigma}] - [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} [K_{\alpha\xi}] \right) \{\hat{\xi}_1\}^{el} = \lambda_1^{(res)} \left( -\{F^{\xi}\}^{el} + [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{F^{\alpha}\}^{el} \right) \\ \{\alpha_1\}^{el} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \left( -\lambda_1^{(res)} \{F^{\alpha}\}^{el} - [K_{\alpha\xi}] \{\hat{\xi}_1\}^{el} \right) \end{cases} \quad (7.6)$$

à l'ordre  $p$ ,  $1 < p \leq N$  :

$$\left\{ \begin{aligned} & \bullet \left( [K_{\xi\xi} + K_{\sigma}] - [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} [K_{\alpha\xi}] \right) \{\hat{\xi}_p\}^{el} = \\ & \quad \lambda_p^{(res)} \left( -\{F^{\xi}\}^{el} + [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{F^{\alpha}\}^{el} \right) + \{F_p^{nl\xi}\}^{el} - [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{F_p^{nl\alpha}\}^{el} \\ & \bullet \{\alpha_p\}^{el} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \left( -\lambda_p^{(res)} \{F^{\alpha}\}^{el} + \{F_p^{nl\alpha}\}^{el} - [K_{\alpha\xi}] \{\hat{\xi}_p\}^{el} \right) \end{aligned} \right. \quad (7.7)$$

Le problème EF global est obtenu après assemblage et s'écrit comme suit :

à l'ordre 1 :

$$[K_T] \{\hat{\xi}_1\} = \lambda_1^{(res)} \left( -\{F^{\xi}\} + \bigcup_{el=1}^{nb\acute{e}l\acute{e}ments} \left( [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{F^{\alpha}\}^{el} \right) \right) \quad (7.8)$$

à l'ordre  $p$ ,  $1 < p \leq N$  :

$$\begin{aligned} [K_T] \{\hat{\xi}_p\} = \lambda_p^{(res)} \left( -\{F^{\xi}\} + \bigcup_{el=1}^{nb\acute{e}l\acute{e}ments} \left( [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{F^{\alpha}\}^{el} \right) \right) \\ + \bigcup_{el=1}^{nb\acute{e}l\acute{e}ments} \left( \{F_p^{nl\xi}\}^{el} - [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{F_p^{nl\alpha}\}^{el} \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Dans cette relation,

$$[K_T] = \bigcup_{el=1}^{nb\acute{e}l\acute{e}ments} [K_{\xi\xi} + K_{\sigma}] - [K_{\alpha\xi}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} [K_{\alpha\xi}]$$

Dans l'équation (7.9) on peut distinguer la forme générale de notre problème tangent à un ordre  $p$  donné :

$$[K_T] \{\hat{\xi}_p\} = \lambda_p^{(res)} \{F\} + \{F_p^{nl}\} \quad (7.10)$$

## Annexe 2 : Problème auxiliaire pour le calcul du point de bifurcation

Une perturbation par une force fictive  $\Delta\mu f_\mu$  engendre une réponse en déformation et en contrainte tel que :

$$\begin{aligned}\xi &\leftarrow \xi + \Delta\xi \\ \tilde{\gamma} &\leftarrow \tilde{\gamma} + \Delta\tilde{\gamma} \\ S &\leftarrow S + \Delta S\end{aligned}\tag{7.11}$$

avec :

$$\begin{aligned}S + \Delta S &= \lambda^{(res)} S^{res} + \mathbb{C} : \left[ \gamma^l(\xi + \Delta\xi) + \gamma^{nl}(\xi + \Delta\xi, \xi + \Delta\xi) + \tilde{\gamma} + \Delta\tilde{\gamma} \right] \\ &= \lambda^{(res)} S^{res} + \mathbb{C} : \left[ \gamma^l(\xi) + \gamma^{nl}(\xi, \xi) + \tilde{\gamma} \right] \\ &\quad + \mathbb{C} : \left[ \gamma^l(\Delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \Delta\xi) + \overbrace{\gamma^{nl}(\Delta\xi, \Delta\xi)}^{\simeq 0} + \Delta\tilde{\gamma} \right]\end{aligned}\tag{7.12}$$

Sachant que :

$$S = \lambda^{(res)} S^{res} + \mathbb{C} : \left[ \gamma^l(\xi) + \gamma^{nl}(\xi, \xi) + \tilde{\gamma} \right]\tag{7.13}$$

On identifie  $\Delta S$  tel que :

$$\Delta S = \mathbb{C} : \left[ \gamma^l(\Delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \Delta\xi) + \Delta\tilde{\gamma} \right]\tag{7.14}$$

Le problème perturbé (4.6) devient :

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{\Omega} S' : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \delta\xi) \right) d\Omega + \int_{\Omega} S' : 2\gamma^{nl}(\Delta\xi, \delta\xi) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \Delta S' : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \delta\xi) \right) d\Omega \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} \Delta S' : 2\gamma^{nl}(\Delta\xi, \delta\xi) d\Omega}_{\simeq 0} = \Delta\mu \int_{\Omega} f_\mu \delta\xi d\Omega + \hat{\lambda}^{(tra)} \int_{\partial\Omega_3} P \delta\xi dS \\ &\int_{\Omega} S' : \delta\tilde{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \Delta S' : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \end{aligned} \right.\tag{7.15}$$

En tenant compte de l'équilibre, (7.15) on obtient le système auxiliaire :

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{\Omega} S' : 2\gamma^{nl}(\Delta\xi, \delta\xi) d\Omega + \int_{\Omega} \Delta S' : \left( \gamma^l(\delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \delta\xi) \right) d\Omega = \Delta\mu \int_{\Omega} f_\mu \delta\xi d\Omega \\ &\int_{\Omega} \Delta S' : \delta\tilde{\gamma} d\Omega = 0 \\ &\Delta S = \mathbb{C} : \left( \gamma^l(\Delta\xi) + 2\gamma^{nl}(\xi, \Delta\xi) + \Delta\tilde{\gamma} \right) \end{aligned} \right.\tag{7.16}$$

### Annexe 3 : Transfert de champs par la méthode des moindres carrés mobiles

Le transfert de champs issus d'un maillage hexaédrique 3D de Lam3/Tec3 peut être vu comme une projection de ces champs sur le maillage des éléments coques du modèle de flambage. On considère alors un champ scalaire  $u^h$  défini sur le maillage de Lam3/Tec3, on cherche une approximation  $\tilde{u}$  en chaque point de Gauss  $x_c (x_c, y_c)$  du maillage de coque sous la forme polynomiale suivante :

$$\tilde{u}(x_c) = a_0 + a_1 x_c + a_2 y_c + a_3 x_c^2 + a_4 x_c y_c + a_5 y_c^2 ; \text{ tel que : } a_i = a_i(x_c) \quad (7.17)$$

On peut l'écrire aussi :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_c) &= \Gamma^t(x_c) \Lambda(x_c) = \Gamma^j(x_c) \Lambda^j(x_c) \\ \Gamma^t(x) &= [a_0(x), a_1(x), a_2(x), a_3(x), a_4(x), a_5(x)] \\ \Lambda^t(x) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2] \end{aligned} \quad (7.18)$$

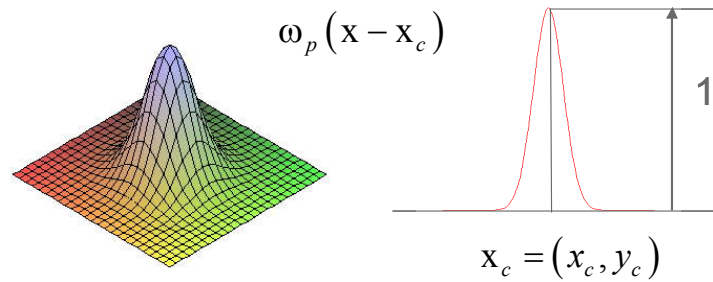
#### Remarque 12 :

L'approximation peut être de degré quelconque ; nous avons choisi une approximation quadratique.

La recherche du champ optimal  $\tilde{u}(x)$  consiste à minimiser la fonctionnelle suivante en chaque point :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_p(x_i - x_c) [u_i^h - \tilde{u}(x_i)]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_p(x_i - x_c) [u_i^h - \Lambda^j(x_i) a_j]^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

$N$  correspond au nombre de points du maillage Lam3/Tec3 auxquels les valeurs de contraintes résiduelles à projeter (ou à transférer) sont données.  $\omega_p(x_i, x_c)$  est la fonction poids centrée en un point de Gauss du maillage coque  $x_c (x_c, y_c)$ , poids qui a l'allure suivante :



**Figure annexe. 1. Graphe de la fonction poids adoptée dans la méthode des moindres carrés mobiles (MLS).**

La minimisation de la fonctionnelle  $J$  revient à écrire :

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0 \quad (7.20)$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^N \omega_p(x_i - x_c) [u_i^h - \Lambda^j(x_i) a_j] \Lambda^k(x_i) = 0 \quad (7.21)$$

Ainsi,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \omega_p(x_i - x_c) \Lambda^j(x_i) \Lambda^k(x_i)}_{A_{jk}} a_j = \underbrace{\sum_{i=1}^N \omega_p(x_i - x_c) u_i^h(x_i) \Lambda^k(x_i)}_{B_k} \quad (7.22)$$

On peut écrire plus explicitement la matrice  $A(x_c)$  et le vecteur  $B(x_c)$  comme suit :

$$A(x_c) = \sum_{i=1}^N \omega_p(x_i - x_c) \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ x_i & x_i^2 & x_i y_i & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 \\ y_i & x_i y_i & y_i^2 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 \\ x_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i^4 & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 \\ x_i y_i & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 \\ y_i^2 & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 & y_i^4 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

$$B(x_c) = \sum_{i=1}^N \omega_p(x_i - x_c) u_i^h(x_i) \{1, x_i, x_i^2, x_i y_i, y_i^2\}^t$$

Les coefficients  $a_k$  sont les inconnues de l'équation (7.22) et donc du système suivant :

$$[A(x_c)] \{a(x_c)\} = \{B(x_c)\} \quad (7.24)$$

On en déduit :

$$a_j = A_{jk}^{-1} B_k \quad (7.25)$$

Une fois les coefficients  $a_k$  obtenus, la fonction d'approximation  $\tilde{u}(x_c)$  est calculée en  $x_c$  ( $x_c, y_c$ ) et, de proche en proche, on balaye tous les points de Gauss du maillage de coque.

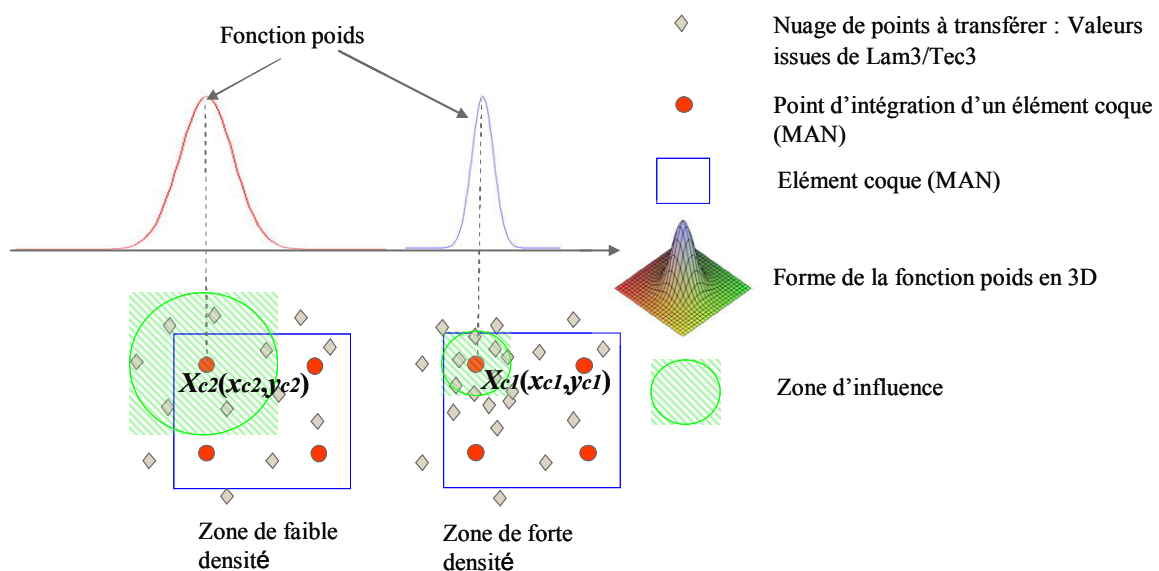
Malgré l'efficacité de cette technique, elle reste limitée par la complexité des champs à transférer (fort gradient et pics de contraintes) et la forte hétérogénéité de la densité du nuage de contraintes à transférer. Ces limitations sont couramment rencontrées lors d'une approche découplée, puisque les contraintes résiduelles dans une tôle laminée présentent souvent des zones critiques à forts gradients avec des pics de contraintes. En outre, le maillage de Lam3/Tec3 est sou-



vent raffiné<sup>14</sup> dans ces zones, parfois très localisées (cf. figure 2-3). Cela induit une hétérogénéité de densité du nuage de points donnant les contraintes résiduelles à transférer. Par ailleurs, si on appelle « zone d'influence » la zone « recouverte » par la fonction poids centrée en un point  $x_c$ , celle-ci doit réaliser un compromis entre deux impératifs :

- être assez étroite pour que, dans le transfert des champs de contraintes résiduelles ayant de forts gradients et des pics, les valeurs trouvées ne soient pas trop influencées par le voisinage, ce qui lisserait les champs et fausserait localement le transfert, avec des conséquences potentiellement importantes.
- Si la fonction poids a une « zone d'influence » trop réduite, elle risque de ne contenir aucun point du maillage Lam3/Tec3 dans les endroits où ce dernier est « grossier ». Ceci engendre alors une perte d'information et le transfert n'est plus possible.

Dans le but d'optimiser le transfert de champs, une technique a été mise en place qui consiste à adapter automatiquement la « zone d'influence » selon la densité du maillage Lam3/Tec3 : la « zone d'influence » est de plus en plus large dans les zones de faible densité de maillage Lam3/Tec3 autour d'un point de Gauss  $x_c$ , et inversement (cf. schéma explicatif ci-dessous).



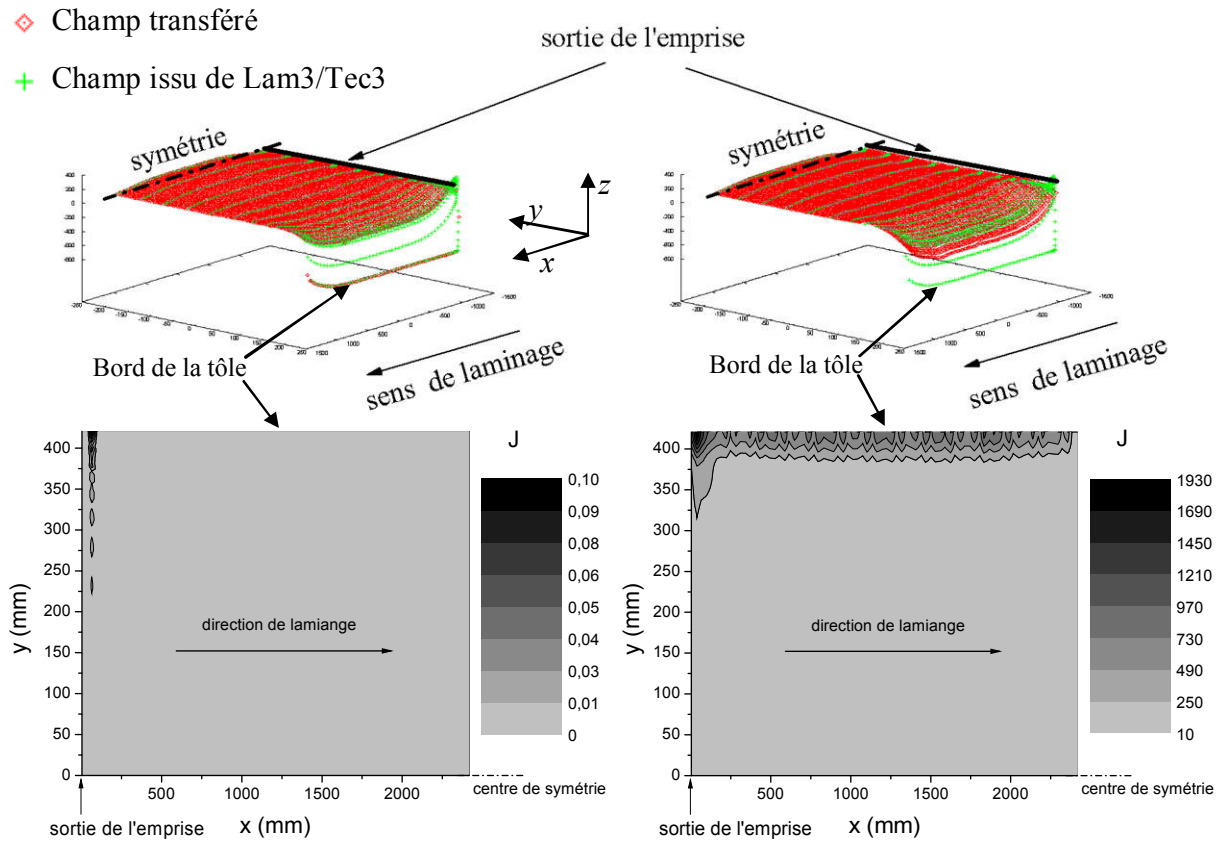
**Figure annexe. 2. Schéma explicatif de la méthode des moindres carrés mobiles optimisée : adaptation de la fonction poids suivant la densité du nuage de points issus de Lam3/Tec3 autour d'un point d'intégration ( $x_c$ ) sur le maillage du modèle de flambage de coques « MAN ».**

Dans un premier temps, l'adaptation de la fonction poids commençait par la recherche, dans le maillage de Lam3/Tec3, du point (parmi les losanges gris) le plus proche de  $x_c$  (point de Gauss « coques », cercles rouges). Ainsi, on évaluait le plus petit rayon convenable de la « zone d'influence » (rayon contenant un seul point du maillage de Lam3/Tec3). Ce domaine est élargi en multipliant ce rayon par un coefficient choisi par l'utilisateur afin de chercher plus d'informations sur l'entourage du point considéré. Cette technique améliore le transfert des champs, mais il arrive quelquefois que la « zone d'influence » ne soit pas suffisamment étendue, et ne contienne pas suffisamment de points. Pour y remédier, on a mis au point une méthode en-

<sup>14</sup> Dans les zones critiques, le maillage de Lam3/Tec3 est raffiné pour décrire correctement les variations brutales des variables d'états (contraintes, déformation, température...).

core plus adéquate qui permet à l'utilisateur de choisir le nombre de points que doit contenir la « zone d'influence » et les résultats du transfert sont nettement plus précis. En effet, la figure annexe. 3 montre qu'après avoir optimisé la MLS, les erreurs commises lors du transfert de champs ont considérablement diminué.

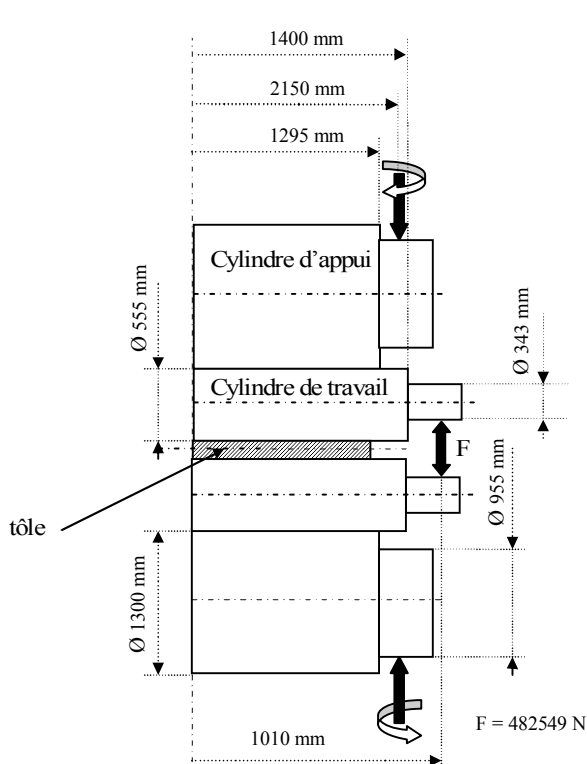
Ce module de transfert de champs précis nous permet d'aborder les applications du modèle de flambage de coques pour des cas industriels représentatifs.



**Figure annexe. 3. Exemple d'amélioration du transfert d'un champ ( $\sigma_{xx}$ ) issu de Lam3/Tec3, représenté par les points rouges (à droite : avant optimisation de la MLS ; à gauche : après optimisation de la MLS).**

## Annexe 4 : Cas de laminage traités

### Cas 1 : cas fer blanc dernière cage tandem

Largeur de la bande	855 mm	
Epaisseur d'entrée (bombé)	0,355 mm (4.81 %) : Figure annexe. 5-a	
Epaisseur de sortie	0,252 mm	
Vitesse de laminage	22 m/s	
Propriétés du laminoir		
Bombé cylindres (cylindres de travail / cylindres d'appui)	0.0322 % / sans bombé : Figure annexe. 5-b	
Effort de traction en amont par unité de surface	170 MPa	<p>Figure annexe. 4. Croquis représentatif de la cage quarto.</p>
Effort de traction en aval par unité de surface	100 MPa	
Loi de frottement	Coulomb : $\tau = 0,03 \times \sigma_n$	

Module d'Young = 210 GPa, coefficient de poisson : 0,3

$$\sigma_0 = (470.5 + 175.4 \times \varepsilon) \times (1 - 0.45 \times e^{-8.9\varepsilon}) - 175$$

Lois de comportement

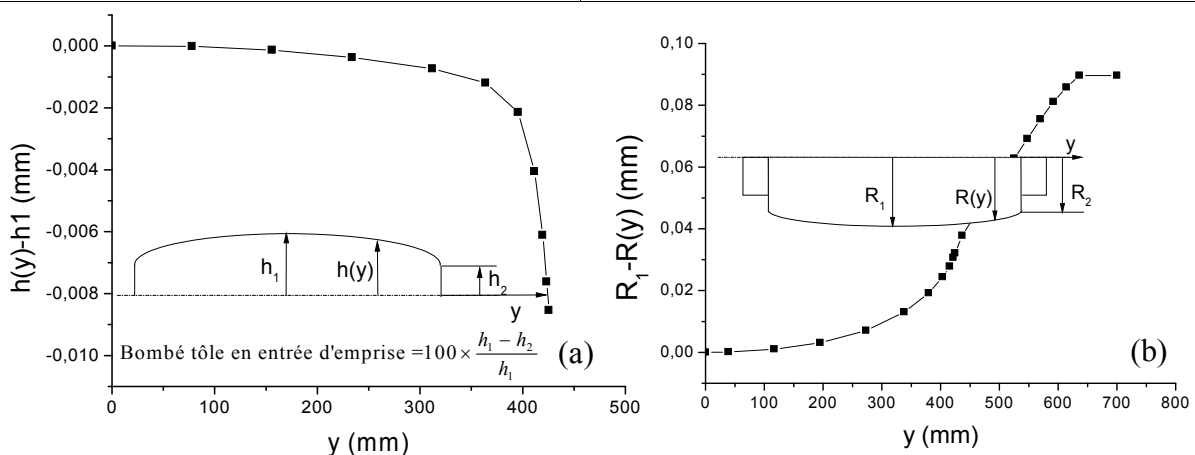


Figure annexe. 5. Bombé tôle en entrée de l'emprise (a) et bombé cylindre de travail (b).

Tableau annexe 2. Données du cas de laminage nommé « cas 1 ».

## Cas 2 : tôle mince dernière cage tandem :

Largeur de la bande	1224 mm
Epaisseur d'entrée (bombé)	0.58 mm (0.82 %) : Figure annexe. 7-a
Epaisseur de sortie	0.572 mm
Vitesse de laminage	18.316 m.s <sup>-1</sup>
Propriétés du laminoir	
Bombé cylindre (cylindres de travail / cylindres d'appui)	0.014 % / sans bombé : Figure annexe. 7-b
Effort de traction en amont par unité de surface	207 MPa
Effort de traction en aval par unité de surface.	27.3 MPa
Loi de frottement	Coulomb : $\tau = 0.13 \times \sigma_n$

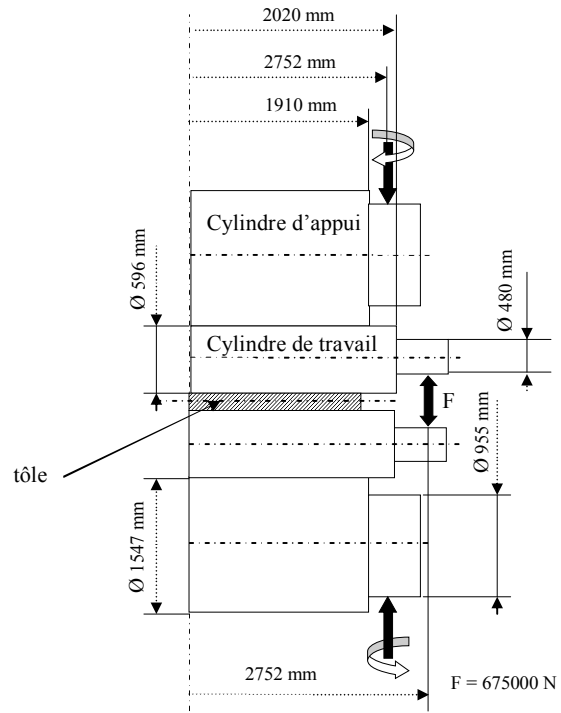


Figure annexe. 6. Croquis représentatif de la cage quarto.

Lois de comportement

Module d'Young = 210 GPa, coefficient de poisson : 0,3

$$\sigma_0 = (452 + 150 \times \bar{\epsilon}) \times (1 - 0.31 \times e^{-9.6\bar{\epsilon}}) - 56$$

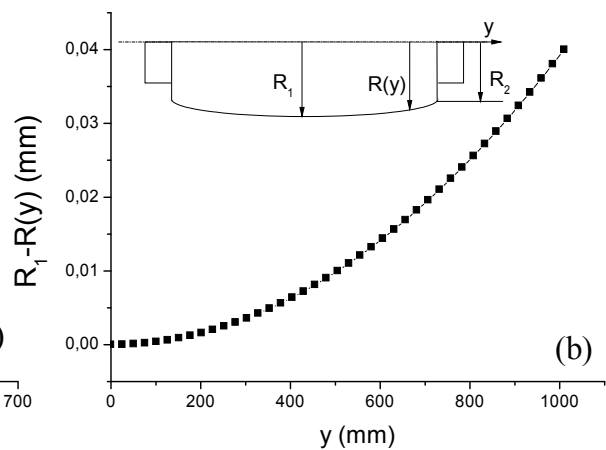
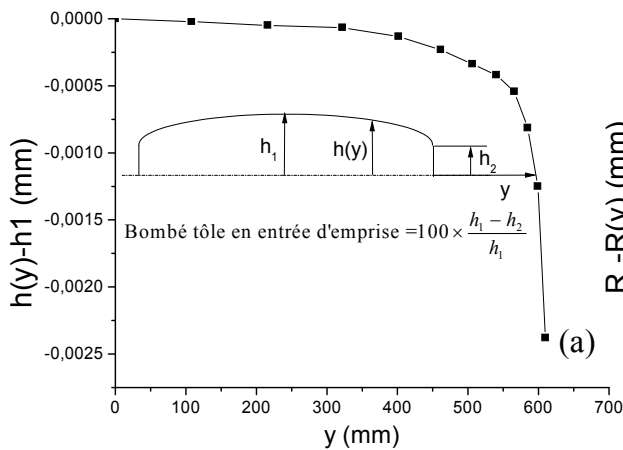
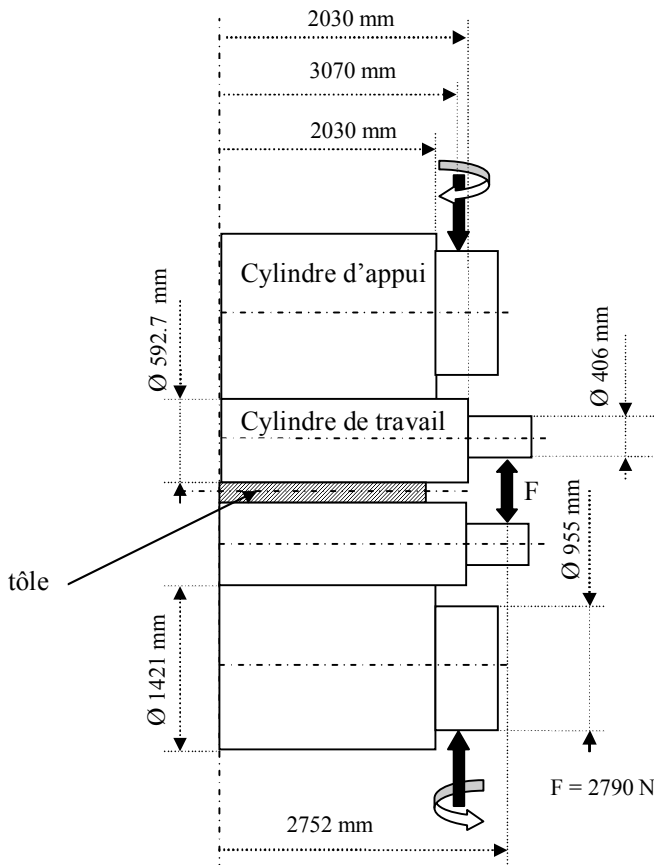
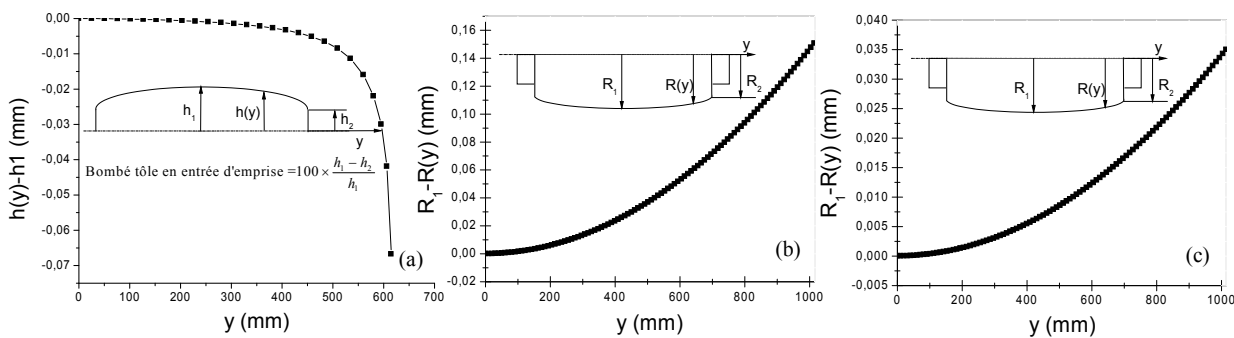


Figure annexe. 7. Bombé tôle en entrée de l'emprise (a) et bombé cylindre de travail (b).

Tableau annexe 3. Données du cas de laminage nommé « cas 2 ».

**Cas 3 : fer blanc, tôle mince « Mardyck ».**

Largeur de la bande	1232 mm	
Epaisseur d'entrée (bombé)	0.409 mm (32.66 %) Figure annexe. 9-a	
Epaisseur de sortie	0.279 mm	
Vitesse de lami- nage	8.333 m.s <sup>-1</sup>	
Propriétés du laminoir		
Bombé cylindres (cylindres de tra- vail / cylindres d'appui)	0.0508 % / 0.005% : Figure annexe. 9-b et c	
Effort de traction en amont par unité de surface	179 MPa	
Effort de traction en aval par unité de surface	58 MPa	<b>Figure annexe. 8. Croquis représentatif de la cage quarto.</b>
Loi de frottement	Coulomb : $\tau = 0,01 \times \sigma_n$	
Lois de comportement		
		Module d'Young = 210 GPa, coefficient de poisson : 0.3 $\sigma_0 = (387.58 + 142.45 \times \bar{\epsilon}) \times (1 - 0.30136 \times e^{-15.83\bar{\epsilon}})$


<b>Figure annexe. 9. Bombé tôle en entrée de l'emprise (a), bombé du cylindre de travail (b) et bombé du cylindre d'appui (c).</b>

**Tableau annexe 2. Données du cas de laminage nommé « cas3 ».**

## Références bibliographiques

1. [www.leveltek.com](http://www.leveltek.com)
2. A. Hacquin, P. Montmitonnet, P. Guilleraut. A steady state thermo-elastoviscoplastic finite element model of rolling with coupled thermo-elastic roll deformation. J. Mat. Proc. Techn., 1996, Vol. 60, pp. 109-116.
3. A. Hacquin, P. Montmitonnet, J. P. Guilleraut. Experimental validation of a rolling stand elastic deformation model. J. Mat. Proc. Techn., 1994, Vol. 45, pp. 99-206.
4. A. Haquin. Modélisation thermomécanique tridimensionnelle du laminage. Thèse, Ecole des Mines de Paris, 1996.
5. C. Counhaye. Modélisation et contrôle industriel de la géométrie des aciers laminés à froid. Thèse, Université de Liège, 2000.
6. G. Béranger, G. Henry, G. Sanz. Le livre de l'acier. Eds Lavoisier, Paris, 1996.
7. P. Barrand, R. Gadeau. L'aluminium, tome 1. Eds Eyrolles, Paris, 1964.
8. W. L. Roberts. Hot Rolling of steel. Eds Marcel Dekker, New York, 1983.
9. W. L. Roberts. Cold rolling of steel. Eds Marcel Dekker, New York, 1978.
10. N. Legrand. La planéité sur les laminoirs à empilement coplanaire. Rapport interne, ArcelorMittal Maizières-lès-Metz (France), R&D Industrial Operations, 2001.
11. O. Pawelski, W. Rasp, J. Rieckmann. Beschreibung der elastischen und plastischen formänderungen in kaltwalzgerüsten. Stahl und Eisen, 1989, Vol. 109, pp. 49-57.
12. D. Steinier, A. Orban, C. Counhaye. Maîtrise de la planéité dans le processus de laminage à froid : validation des mesures. La Revue de Métallurgie – CIT, 1993, Vol. 11, pp. 1501-1507.
13. W. J. K. Person, Shape measurement and control. J. Inst. Metals, 1964, Vol. 93, pp. 169-178.
14. G. Vecino, A. Espina. Contactless measurement of strip flatness based on capacitance. Rapport interne, ArcelorMittal Asturias (Espagne), R&D Technological Centre, 2008.
15. F. Jeuniaux, M. Malhomme, R. Lecinge, J. M. Moretti, G. Haralamb. Validation d'un nouveau procédé de mesure de planéité au défilé (essai en tôlerie forte). La Revue de Métallurgie – CIT, 1996, Vol. 6, pp. 791-797.
16. P. Kantola, T. Pironen, J. Kinnula, J. Pakkari. An automated flatness monitoring system for steel plate inspection. In Proc. Conference "The control Of Profile and Flatness", The Institute of Materials, International Convention Centre, Birmingham, UK, 1996, pp. 34-46.
17. M. Degner, U. Müller, G. Thiemann, D. Winter. Topometric on-line flatness measuring system for improved flatness control of hot strip. In Proc. The 7<sup>th</sup> Int. Conf. on Steel Rolling, Chiba, Japan, 1998, pp. 42-47.
18. R. J. Beattie. Manifest shape measurement for aluminium hot lines. In Proc. Conf. "The Control of Profile and Flatness", The institute of Materials, International Convention Centre, Birmingham, UK, 1996, pp. 37-44.
19. H. Palkowski, P. Funke. Beeinflussung des eigenspannungszustandes in Kaltprofilen durch einige Umformbedingungen. Stahl und Eisen, 1980, Vol. 100, pp. 478-483.
20. Industrial automation services Pty Ltd. International Rolling Technology Course. I.A.S., P.O. Box 100. York Street, Teralba N.S.W. 2284, Australia, 1999.
21. J.W. Beeston, W.J. Edwards. Thermal camber analysis in cold rolling. Automation of tandem mills, Bryant G. F. (ed.), The Iron and Steel Institute, 1973, pp. 320-339.

22. T. Yazawa, T. Sasaki, H. Rurukawa, Y. Suyanagi. Flatness control in plate rolling. In Proc. Int. Steel Rolling Conf., Chiba, Japan, 1998, pp. 6611-616.
23. H. Ford, F. Ellis, D. R. Bland. Cold rolling with strip tension Part I. J. Iron & Steel Inst., 1951, Vol. 168, pp. 57-72.
24. J.M. Alexander. On the theory of rolling. Proc. R. Soc. London, 1972, Vol. 336, pp. 535-563.
25. O. Wiklund, N. G. Jonsson, J. Levén. Simulation of crown, profile, and flatness of cold rolled strip by merging several physically based computer models. In Proc. the 4th Int. Steel Rolling Conf., 1987, Deauville, E.9. Irsid/ATS (ed.).
26. Y. Tozawa. Analysis for three-dimensional deformation in strip rolling taken deformation of rolls into consideration. Proc. Conf. "Advanced technology of plasticity", 1984, Vol. 11, pp. 1151-1160.
27. H. Matsumoto, T. Kawanami. Mechanism of material deformation related to shape and crown phenomena. In Proc. The 4th Int. Steel Rolling Conf., 1987, Deauville. E.6, Irsid/ATS (ed.).
28. H. Matsumoto. 2-dimensional lateral-material flow reduced from 3-dimensional theory for flat rolling. ISIJ International, 1991, Vol. 31, pp. 550-558.
29. A. E. Dixon, W. Y. Yuen. A physical based method to predict spread and shape during flat rolling for real-time application. Steel Res. Int., 2008, Vol. 79, pp. 287-296.
30. J. Jeswiet. Measuring metal deformation interface forces and temperatures. CSME 17, Vol. 17, Issue 4A, 1993, pp. 633-645.
31. J. Jeswiet. Aspect ratio, friction and normal forces in strip rolling. J. Mat. Proc. Tech. Vol. 53, 1995, pp. 846-856.
32. G. J. Li, S. Kobayashi. Rigid-plastic finite-element analysis of plane strain rolling. ASME J. Eng. Ind., Vol. 104, 1982, pp. 55-64.
33. J. Hitchcock. Rolling neck and bearing. ASME Research Publication, 1935, pp. 33-41.
34. D. Jortner, J. F. Osterle, C. F. Zorowski. An analysis of cold strip rolling. Int. J. Mech. Sci., 1960, Vol. 2, pp. 179-194.
35. B. Berger, O. Pawelski, P. Funke. Die elastische Verformung der Walzen von Vierwalzengerüste. Arch. Eisenhüttenwes. Vol. 47, 1976, pp. 351-356. (repris et analysé dans Hacquin [4]).
36. A. Atreya, J. G. Lenard. A study of cold strip rolling. ASME J. Engg Mat. Tech, 1979, Vol. 101, pp. 129-134.
37. K.I. Mori, K. Nakadoi, M. Fukua, K. Osakada. Coupled analysis of steady state forming process with elastic tools. In Proc. NUMIFORM Conference, Gothenburg, Sweden, 1986, K. Mattiasson et al. (eds). Balkema, Rotterdam.
38. S. X. Zhou, P. Funke, J. Zhong, C. Polciennik. Modification of a classical formula for determination of roll flattening in flat rolling. Steel Res., 1996, Vol. 67, pp. 491-494 .
39. S.M. Hwang, C.G. Sun, S.R. Ryoo, W.J. Kwak. An integrated FE process model for precision analysis of thermo-mechanical behaviors of rolls and strip in hot strip rolling. Comput. Meth. Appl. Mech. Engg, 2002, Vol. 191, pp. 4015-4033.
40. P. Montmitonnet. Comparison of profile prediction models for strip rolling. Proc. IOM3 Conference. "Achieving profile and flatness in flat products", Birmingham, UK, 2006, pp. 24-25.
41. K. Mori, K. Osakada, T. Oda. Simulation of plane-strain rolling by rigid-plastic finite element method. I. J. Mech. Sci., 1982, Vol. 24, pp. 519-527.
42. H. J. Huisman, J. Huétink. A combined Eulerian-Lagrangian three-dimensional finite-element analysis of edge-rolling, J. Mech. Working Tech., 1985, Vol. 11, pp. 333-353.
43. S. Philippe. Développement d'une formulation arbitrairement lagrangienne eulérienne pour la simulation tridimensionnelle du laminage de produits plats. Thèse, Ecole des Mines de Paris, 2009.

44. A. Mukhopadhyay, I.C. Howard, C.M. Sellars. Development and validation of a finite element model for hot rolling using Abaqus-standard®. *Mat. Sci. Tech.*, 2004, Vol. 20, pp. 1123-1133.
45. A. Kainz, E. Parteder, M. Widder, K. Zeman. Elasto-Plastic Simulation Concepts For Profile Transfer And Flatness Prediction. In *Proc. NUMIFORM Conference*, Porto, 2007, pp. 1017-1022. J.M.A. César de Sá et al., eds. AIP Publ.
46. X. H. Liu, X. Shi, S. H. Li, J. Y. Xu, G. D. Wang. FEM Analysis of Rolling Pressure Along Strip Width in Cold Rolling Process. *Steel Res. Int.*, 2007, Vol. 14, pp. 22-26.
47. E. N. Dvorkin, M. B. Goldschmit, M. A. Cavaliere, P. M. Amenta, O. Marini, W. Stroppiana. 2D finite element parametric studies of the flat-rolling process. *J. Mat. Proc. Tech.*, 1997, Vol. 68, pp. 99-107.
48. J. Huétink. Analysis of metal forming processes based on a combined Eulerian-Lagrangian finite element formulation. In *Proc. NUMIFORM Conference*, pp. 501-509. eds, J.F.T. Pittman et al., Pineridge, Swansea, 1982.
49. A. Kainz, A. Obereder. Finite Element Simulations of the Visco-Plastic Strip Behavior for Steady State Flat Hot Rolling Processes. In *Proc. 5<sup>th</sup> WCCM*, H.A. Mang et al., eds, Vienna, Austria, 2002, pp. 1017-1022.
50. R. Kopp, C. Horst. Modelling of elastic effects in forming processes, particularly the rolling process. In *Proc. NUMIFORM Conference*, Columbus, 2004, pp. 375-381. S. Ghosh et al., eds. AIP Publ.
51. K. Yamada, S. Ogawa, S. Hamauzu, T. Kikuma. Three-dimensional analysis of mandrel rolling using rigid-plastic finite element method. In *Proc. NUMIFORM Conference*, Fort-Collins, USA, 1989, pp. 375-380. Thompson et al., eds. Balkema A.A., Rotterdam, Netherlands, 1989.
52. J. Yanagimoto, M. Kiuchi. Three-dimensional simulation system for coupled elastic/rigid-plastic deformation of rolls and workpiece in strip rolling processes. In *Proc. NUMIFORM Conference*, Sophia-Antipolis, France, 1992, pp.763-768. Chenot et al., eds. Balkema A.A., Rotterdam, Netherlands, 1992.
53. Z. Y. Jiang, A. K. Tieu. Modeling of the rolling processes by a 3-D rigid plastic/viscoplastic finite element method with shifted ICCG method. *Comp. Struct.*, 2001, Vol. 79, pp. 2727-2740.
54. H. Marchand. Modélisation de la planéité en sortie de laminage des produits plats. Thèse, Ecole des Mines de Paris, 2000.
55. H. Daanouni, Y. Tillier, F. Bay. Numerical studies of wrinkling phenomenon in inflatable hyperelastic membranes undergoing multiaxial loadings. In *Proc. 12th ESAFORM Conf.*, Twente, Netherlands, 2009, pp. 593-596.
56. F. D. Fisher, F. G. Rammerstorfer, N. Friedl, W. Wisser. Buckling phenomena related to rolling and levelling of sheet metal. *Int. J. Mech. Sci.*, 2000, Vol. 42, pp. 1887-1910.
57. F. G. Rammerstorfer, F. D. Fisher, N. Friedl. Buckling of free infinite strips under residual stress and global tension. *ASME J. Appl. Mech.*, 2001, Vol 68, pp. 399-404.
58. F.D. Fischer, F. G. Rammerstorfer, N. Friedl. Residual stress-induced centre wave buckling of rolled strip metal. *ASME J. Appl. Mech.*, 2003, Vol. 70, pp. 84-90.
59. A. Bush, R. Nicholls, J. Tunstall. Stress levels for elastic buckling of rolled strip and plate. *Ironm. Steelm.*, 2001, Vol. 28, pp. 481-484.
60. N. Yukawa, T. Ishikawa, Y. Tozawa. Numerical analysis of the shape of rolled strip. In *Proc. NUMIFORM Conference*, Gothenburg, Sweden, 1986, pp. 249-254.
61. S. P. Timoshenko, J. M. Gere. *Theory of elastic stability*. Mc Graw Hill Book Company, Inc, New York, 2<sup>nd</sup> Edition, 1961.
62. H. Ben Dhia, O. Jamond. On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engg*, 2010, Vol. 199, pp. 1403-1414.



63. H. Ben Dhia. Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. CRAS - IIB - Mechanics-Physics-Astronomy, 1998, Vol. 326, pp. 899-904.
64. H. Ben Dhia, G. Rateau. Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. CRAS - I – Mathematics, 2001, Vol. 332, pp. 649-654.
65. O. Essersi. Prédiction de la planéité des tôles métalliques en laminage à froid par Lam3/Tec3. Rapport de stage de D.E.A, L.P.M.M - Université de Metz, 2005.
66. S. Abdelkhalek, M. Potier-Ferry, P. Montmitonnet, N. Legrand, P. Buessler. Strip Flatness Modelling including Buckling Phenomena during Cold Rolling. Proc. 5<sup>th</sup> Eur. Rolling Conf., London, UK, 2009.
67. C. D. Coman, A. P. Bassom. An asymptotic description of the elastic instability of twisted thin elastic plates. Acta Mech., 2008. Vol. 200, pp. 59-68.
68. H. Zahrouni, B. Cochelin, M. Potier-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. Comput. Meth. Appl. Mech. Engg, 1999, Vol. 175, pp. 71-85.
69. H. Zahrouni. Méthode Asymptotique Numérique pour les coques en grandes rotations. Thèse, LPMM - Université de Metz, 1998.
70. N. Büchter, E. Ramm, and D. Roehl. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the Enhanced Assumed Strain Concept. Int. J. Numer. Meth. Engg, 1994, Vol. 37, Issue 22, pp. 2551-2568.
71. J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and method of incompatible modes. Int. J. Numer. Meth. Engg, 1990, Vol. 70, pp. 1595-1636.
72. H. Stolarski and T. Belytschko, Membrane locking and reduced integration for curved elements. ASME J. Appl. Mech., 1982, Vol. 49, Issue 22, pp. 172.
73. T. Kerber. Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes. La Recherche Aérospatiale, 1990, Vol. 3, Issue 22, pp. 45-76.
74. B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. Méthode Asymptotique Numérique pour les problèmes non linéaires. Hermès – Lavoisier, 2007.
75. A. Elhage-Hussein, M. Potier-Ferry, N. Damil. A numerical continuation method based on Padé approximants. Int. J. Solids Struct., 2000, Vol. 37, pp. 6981-7001.
76. A. Najah, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. A critical review of asymptotic numerical methods, Arch. Comput. Meth. Engg., 1998, Vol. 5, pp. 31-50.
77. H. Lahmam, J. M. Cadou, H. Zahrouni, N. Damil, M. Potier-Ferry. High-order prediction-corrector algorithms. Int. J. Numer. Meth. Engg, 2002, Vol. 55, pp. 1964-1992.
78. W. Aggoune, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method for unilateral contact. Int. J. Numer. Meth. Engg, 2006, Vol. 68, pp. 605-631.
79. E.H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi. Bifurcation Points and Bifurcated Branches by an Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants. Int. J. Numer. Meth. Engg, 2004, Vol. 60, pp. 1987-2012.
80. H. Zahrouni, M. Potier-ferry, N. Legrand, P. Buessler. Etude du flambage d'une bande métallique soumise à différents chargements mécaniques. Rapport de contrat de recherche, ArcelorMittal, 2007.
81. A. Belhadj Ahmed. Étude de l'instabilité due aux contraintes résiduelles dans les tôles minces et application au procédé de laminage. Rapport de stage de Master, LPMM - Université de Metz, 2009.





# Un exemple de flambage sous contraintes internes : Étude des défauts de planéité en laminage à froid des tôles minces.

## (Etude numérique et comparaison avec l'expérience)

**RESUME :** Lam3/Tec3 est un modèle stationnaire éléments finis 3D de laminage dans lequel le maillage de la tôle est composé d'éléments hexaédriques. Des études passées ont montré que par lui-même, il est mal adapté pour simuler les défauts de planéité des tôles laminées. A l'heure actuelle, les éléments coques sont les mieux adaptés pour prédire le flambage des tôles sous contraintes résiduelles, dont font partie les défauts de planéité. Ainsi, l'objectif du présent travail est de perfectionner Lam3/Tec3 en le couplant itérativement avec un modèle éléments finis de flambage de coques sous contraintes résiduelles. Ce modèle, nommé « MAN », est basé sur la Méthode Asymptotique Numérique pour la résolution des problèmes non linéaires. Comparé aux modèles existants de la littérature, il possède une précision satisfaisante pour la détection de la charge critique de flambage et les modes correspondants; il peut aussi traiter des cas de champs de contraintes résiduelles et modes de flambage plus complexes; il possède enfin une capacité de calcul du post-flambage, ce qui le distingue aussi de ses concurrents. Nous avons comparé les résultats obtenus en mode découplé et en mode couplé itérativement, ainsi qu'avec Lam3/Tec3 additionné d'un modèle simplifié de flambage dû à Counhaye (plus simple et moins coûteux, mais sans capacité de post-flambement). Nous nous sommes particulièrement intéressés à la comparaison avec les mesures en ligne des profils transverses de contrainte longitudinale par "rouleaux de planéité" (la "planéité latente"), ainsi qu'à la question des interactions entre les champs mécaniques sous emprise et post-emprise. Les profils obtenus à la position des rouleaux de planéité sont en bon accord avec les mesures expérimentales, en particulier pour les cas de laminage présentant des défauts. Les résultats montrent l'importance de réaliser un calcul couplé, soit fortement soit itérativement, pour saisir les détails de ces profils de contrainte, capitaux à quelques MPa près pour le calcul des formes post-flambées, c'est-à-dire les défauts de planéité.

**Mots clés :** Laminage, Tôles, Défauts de planéité, Flambage, Post-flambage, Contraintes résiduelles, Coques, Méthode Asymptotique Numérique, Éléments finis.

## An example of buckling under internal stresses: Flatness defect study in thin strip cold rolling.

### (Numerical study and comparison with experiments)

**ABSTRACT :** Lam3/Tec3 is a 3D steady-state FEM rolling model using a hexahedral mesh, proved in the past to be poorly adapted to modelling flatness defects in strip rolling. Shell elements are indeed much more suitable for this purpose, i.e. to predict buckling of plates under residual stresses. Thus, the purpose of this work is to improve Lam3/Tec3 by coupling it iteratively with a shell FEM of plate buckling under residual stresses. This model, called "MAN", is based on the Asymptotic Numerical Method for the resolution of non linear problems. Compared to existing models in the literature, it shows sufficient accuracy to compute the critical buckling loads and the corresponding buckling modes, it can solve more complex cases (complex residual stress fields and buckling modes), and has a post-buckling capability, which distinguishes it from the other models. We have compared results of Lam3/Tec3-MAN in the decoupled as well as the iteratively coupled modes, and also with a version of Lam3/Tec3 including a simplified buckling model proposed by Counhaye (simple and fast, but unable to study post-buckling). The analysis of the results is focussed on the one hand on the comparison with experimental transverse profiles of the longitudinal stress, obtained by "flatness rolls", on the other hand on the interactions between the mechanical fields in the roll bite and post bite. Profiles obtained at the position of the flatness rolls are in good agreement with the measurements. The results prove the importance of a coupled rolling / buckling model, be it coupled strongly or iteratively, to capture the details of the stress profiles. It is also shown that it is essential to reproduce the latter with a precision of a few MPa in order to predict correctly buckling and post-buckling.

**Keywords :** Rolling, Strip, Flatness defect, Buckling, Post-buckling, Residual stress, Shell, Asymptotic Numerical Method, Finite element.